II NATUURLIJKE, GEHELE EN RATIONALE GETALLEN

Iedereen kent getallen: de natuurlijke getallen, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, gebruiken we om te tellen, om getallen van elkaar af te kunnen trekken hebben we de gehele getallen, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, nodig, de rationale getallen $\mathbb{Q}$ zijn nodig om bijvoorbeeld delen van een geheel te meten. Dat we bij het meten ook getallen tegenkomen die geen breuken zijn was al aan oude Grieken bekend: de lengte van de schuine zijde van een gelijkbenige rechthoekige driehoek met beide benen van lengte 1 is geen breuk. We hebben een grotere verzameling dan $\mathbb{Q}$ nodig, de verzameling $\mathbb{R}$ van alle reële getallen. Ook met reële getallen kunnen we niet alles: een simpele vergelijking als $x^2 + 1 = 0$ heeft geen reële oplossing. In de grotere getallenverzameling $\mathbb{C}$ zijn wel oplossingen van deze vergelijking te vinden.

In dit en in het volgende hoofdstuk zullen we de basiseigenschappen van de getallen en hun gevolgen bestuderen. We zullen ook aandacht aan de vraag besteden welke eigenschappen de getalsystemen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ van elkaar onderscheiden.

II.1 Natuurlijke getallen en volledige inductie

Axioma's

Alhoewel we allemaal weten, of misschien denken te weten, wat natuurlijke en gehele getallen zijn, en wat de gebruikelijke operaties als optelling en vermenigvuldiging daarop zijn, is het goed om een korte lijst eigenschappen, ofwel *axioma's*, te geven die deze getalsystemen precies karakteriseren. Het doel hiervan is dat er dan geen dubbelzinnigheid is over wat we wel en niet mogen aannemen. Een ander gevolg van de axiomatische benadering is dat het er niet meer toe doet wat ieder onder ons denkt dat natuurlijke getallen precies zijn, zolang ze maar aan de axioma's voldoen (denk hierbij maar aan de vele manieren waarop natuurlijke getallen geïmplementeerd kunnen worden in computers, als die een oneindig geheugen zouden hebben). De axioma's worden dan als uitgangspunt genomen in het bewijzen van weer andere beweringen over de getalsystemen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$.

Axioma's voor $\mathbb{N}$

We beginnen met de eigenschappen van de natuurlijke getallen en optelling. De *gegevens* zijn:

(a) een verzameling $\mathbb{N}$;
(b) elementen 0 en 1 in $\mathbb{N}$;
(c) een afbeelding $+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, de optelling;
(d) een afbeelding $\cdot\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, de vermenigvuldiging.

De optelling voldoet aan de volgende *eigenschappen*:

(N0) de optelling is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{N}$ geldt $a + b = b + a$;
(N1) de optelling is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ geldt $(a+b)+c = a+(b+c)$;
(N2) 0 is *neutraal* voor de optelling, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{N}$ geldt $0 + a = a$ en $a + 0 = a$;
(N3) de *schrapwet* geldt voor de optelling, d.w.z., voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ geldt $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.

Bovenstaande eigenschappen gelden bijvoorbeeld ook voor de optelling van reële getallen. De drie axioma's hieronder zijn specifiek voor $\mathbb{N}$.

(N4) de elementen 0 en 1 zijn verschillend;
(N5) er is geen $a \in \mathbb{N}$ met $1 + a = 0$ (m.a.w. 0 is het 'kleinst');
(N6) axioma van *inductie*: als $A \subseteq \mathbb{N}$ voldoet aan de eigenschappen $0 \in A$ en $a \in A \Rightarrow 1 + a \in A$, dan $A = \mathbb{N}$;

De bovenstaande axioma's beschrijven $\mathbb{N}$ met 0, 1 en zijn optelling volledig. Men kan bewijzen (met behulp van Stelling X.3.1) dat de bovenstaande lijst de gegevens $(\mathbb{N}, 0, 1, +)$ uniek karakteriseert, in de zin dat als $(\mathbb{N}', 0', 1', +')$ aan deze eigenschappen voldoet, er een unieke bijectie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ is zodat $f(0) = 0'$, $f(1) = 1'$, en zodat voor alle $a, b \in \mathbb{N}$ geldt dat $f(a + b) = f(a) +' f(b)$.

Uit **(N6)** volgt dat ieder element van $\mathbb{N}$ een eindige som $1+\cdots+1$ is (waarbij de som met nul termen per definitie 0 is). Dus inderdaad volgt dat $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$, waarbij $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, ...

We hebben nog niets gezegd over de vermenigvuldiging in $\mathbb{N}$. Deze kan men uit de optelling construeren, maar in plaats daarvan zullen we de vermenigvuldiging hier axiomatisch vastleggen.

(N7) de vermenigvuldiging is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{N}$ geldt $ab = ba$;
(N8) de vermenigvuldiging is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ geldt $(ab)c = a(bc)$;
(N9) 1 is *neutraal* voor de vermenigvuldiging, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{N}$ geldt $1{\cdot}a = a$ en $a{\cdot}1 = a$;
(N10) de *distributieve* wet geldt, d.w.z., voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ geldt $a(b+c) = ab+ac$.

Terecht kan men opmerken dat de lijst eigenschappen toch nog vrij lang is. Een veel kortere karakterisering van de natuurlijke getallen is gegeven door Peano's axioma's, zie Appendix X.2.

Alle bekende rekenregels kan men nu in principe afleiden uit de bovenstaande axioma's. Bijvoorbeeld:

II.1.1 Propositie. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $n \cdot 0 = 0$.

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{N}$. Uit **(N2)** volgt $n \cdot 0 + 0 = n \cdot 0$. Uit **(N2)** volgt ook dat $0 = 0 + 0$, we hebben dus

$$n \cdot 0 + 0 = n \cdot 0 = n \cdot (0 + 0).$$

Axioma **(N10)** volgt nu $n \cdot (0+0) = n \cdot 0 + n \cdot 0$. Samen met bovenstaande formule levert dit

$$n \cdot 0 + 0 = n \cdot 0 + n \cdot 0.$$

Met de schrapwet **(N3)** leiden we nu af $0 = n \cdot 0$, wat we moesten bewijzen. ∎

Ongelijkheden

Uit de optelling op $\mathbb{N}$ kunnen we ook een relatie $\leq$ definiëren als volgt:

$$n_1 \leq n_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{er is een } m \in \mathbb{N} \text{ met } n_1 + m = n_2.$$

De notatie $n_1 < n_2$ is een afkorting voor "$n_1 \leq n_2$ en $n_1 \neq n_2$". Analoog definiëren we $\geq$ en $>$.

Volledige inductie We beschrijven nu een belangrijke techniek om beweringen over natuurlijke getallen te bewijzen. Deze bewijstechniek is gerechtvaardigd door het axioma van inductie, **(N6)** in de lijst van axioma's voor $\mathbb{N}$.

Stel je voor dat we een uitspraak van het type 'Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt ...' willen bewijzen. We kunnen als volgt aan het werk gaan: we gaan eerst na dat de uitspraak juist is voor 0, en daarna laten we zien dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat *als* de uitspraak waar is voor n, *dan* ook voor $n+1$. Het axioma van inductie (ook wel Principe van Volledige Inductie geheten) garandeert nu dat de uitspraak juist is voor elk natuurlijk getal, want de deelverzameling $A \subseteq \mathbb{N}$ van alle natuurlijke getallen waarvoor de uitspraak juist is voldoet aan de twee eisen van het axioma van inductie, zodat $A = \mathbb{N}$. Een bewijs van zo'n type heet een *bewijs met volledige inductie*.

We illustreren de techniek aan de hand van een paar voorbeelden.

II.1.2 Voorbeeld. We gaan bewijzen dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1).$$

We gebruiken inductie naar n.
Stap 1: Voor $n = 0$ volgt dit uit $2 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot (0+1)$.
Stap 2: Laat $n \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $\sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1)$ (dit heet de *inductieveronderstelling*). Dan geldt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2k = \sum_{k=0}^{n} 2k + 2(n+1) \stackrel{(IV)}{=} n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2).$$

De tweede gelijkheid op de regel hierboven volgt op grond van de inductieveronderstelling. ■

Algemener kunnen we zo uitspraken van het type 'Voor alle $n \geqslant N$ geldt ...' bewijzen. We controleren dan de bewering voor $n = N$ en laten daarna weer zien dat voor alle $n \geq N$ geldt dat *als* de bewering voor n, *dan* ook voor $n+1$. Het axioma van inductie is dan van toepassing op de verzameling A van alle $k \in \mathbb{N}$ zó dat de bewering juist is voor $n = N + k$.

II.1.3 Voorbeeld. Zij $x \neq 1$ een reëel getal. We bewijzen dat voor elk natuurlijk getal $n \geqslant 1$ geldt

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1.$$

Stap 1: De bewering is waar voor $n = 1$:

$$\frac{x^1 - 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1} = 1.$$

Stap 2: Laat $n \geqslant 1$. Neem aan dat $(x^n - 1)/(x-1) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1$ (dit heet de *inductieveronderstelling*). Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} &= \frac{x^{n+1} - x^n + x^n - 1}{x - 1} \\
&= \frac{x^n(x-1)}{x-1} + \frac{x^n - 1}{x - 1} \\
&= x^n + \frac{x^n - 1}{x - 1} \\
&\stackrel{(IV)}{=} x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1.
\end{aligned}$$

De laatste gelijkheid geldt op grond van de inductieveronderstelling. ■

Binomium van Newton

We besluiten deze paragraaf met een stelling die voor de uitdrukking $(a+b)^n$, waarbij $n \in \mathbb{N}$ positief is, een mooie formule geeft. We spreken af dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $x^0 = 1$.

Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we $n!$ (spreek uit "*n-faculteit*") als:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n,$$

met de afspraak dat $0! = 1$. (In de appendix wordt het gebruik van $\cdots$ in deze definitie gerechtvaardigd, zie X.3.3) Voor n en k in $\mathbb{N}$ met $k \leq n$ definiëren we de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k}$ (spreek uit "*n boven k*") als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

II.1.4 Stelling (Binomium van Newton)**.** Voor alle reële getallen a en b en elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Bewijs. Laat $a, b \in \mathbb{R}$. Stap 1: De bewering is waar voor $n = 0$:

$$(a+b)^0 = 1 \qquad \text{en} \qquad \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Stap 2: Laat $n \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (dit heet de *inductieveronderstelling*). Dan geldt

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&\overset{(IV)}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Door verschuiven van de sommatieindex in de tweede som krijgen we

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

We gebruiken nu de identiteit uit Opgave II.1.16:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

■

Welordening van $\mathbb{N}$. Een fundamenteel gevolg van het axioma van inductie is dat elke niet-lege deelverzameling van $\mathbb{N}$ een kleinste element bevat.

II.1.5 Stelling (Wel-ordening van $\mathbb{N}$)**.** Zij V een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{N}$. Dan bestaat er een $v \in V$ zodat voor alle $w \in V$ geldt $w \geq v$.

Bewijs. Neem aan dat voor alle $v \in V$ er een $w \in V$ is met $w < v$. Hieruit volgt dat $0 \notin V$. Zij $A \subset \mathbb{N}$ de volgende verzameling

$$A = \{n \in \mathbb{N}\colon \text{voor alle } m \in \mathbb{N} \text{ met } m \leq n \text{ geldt } m \notin V\}.$$

Omdat $0 \notin V$ geldt $0 \in A$.

Neem nu aan dat $n \in A$, dus dan zitten $0, 1, \ldots, n$ niet in V. Als $n+1 \in V$ dan is $n+1$ een kleinste element in V, in tegenspraak met onze aanname, dus $n+1 \notin V$. Maar nu volgt dus dat $n+1 \in A$.

Omdat $0 \in A$ en omdat uit $n \in A$ volgt dat $n+1 \in A$, impliceert **(N6)** dat $A = \mathbb{N}$. Maar dan volgt dat $V = \varnothing$, een tegenspraak. ∎

Opgaven

✍ **1.** Laat $a \in \mathbb{N}$ met $a \neq 0$. Bewijs uit de axioma's dat er een unieke $b \in \mathbb{N}$ is met $a = b + 1$.

2. Zij $a, b \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $ab = 0$. Bewijs dat $a = 0$ of $b = 0$. (*Hint*: gebruik voorgaande opgave, en gebruik dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $n \cdot 0 = 0$, zie Propositie II.1.1.)

3. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle natuurlijke getallen $n \geqslant 1$ de volgende formules gelden:

(a) $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^{n-1}(2n-1) = (-1)^{n-1}n$;

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

✍ **4.** Verzin zelf een formule voor

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)$$

en bewijs met behulp van volledige inductie dat je formule juist is voor elk natuurlijk getal n.

5. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle natuurlijke getallen $n \geqslant 1$ de volgende formules gelden:

(a) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;

(b) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

6. Bewijs met behulp van volledige inductie: voor alle $n \geqslant 1$ geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} 4k^3 = n^2(n+1)^2.$$

7. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $2^n > n$.

8. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal $n \geqslant 4$ geldt $n! > 2^n$.

✍ **9.** Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal n het getal $11^n - 4^n$ deelbaar is door 7.

10. Bewijs met behulp van volledige inductie dat de som van de derde machten van drie opeenvolgende natuurlijke getallen deelbaar is door 9.

11. Gegeven zijn n punten in $\mathbb{R}^2$, $n \geqslant 3$, met de eigenschap dat geen drie punten op een lijn liggen. Bewijs met behulp van volledige inductie dat de punten door $n(n-1)/2$ verschillende lijnen te verbinden zijn, en niet door minder lijnen.

12. Bewijs met behulp van volledige inductie dat n verschillende lijnen in het platte vlak die door de oorsprong gaan het vlak in $2n$ gebieden verdelen.

13. Zij x een reëel getal. Laat zien met behulp van volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$|\sin nx| \leqslant n|\sin x|.$$

✍ **14.** Zij $P(n)$ de bewering 'n^2+3n+1 is een even getal'. Laat zien dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

als $P(n)$ waar is dan is $P(n+1)$ waar.

Geldt $P(n)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$? Verklaar je antwoord.

✍ **15.** Vind de fout in het volgende 'bewijs met volledige inductie' dat alle mensen op dezelfde dag jarig zijn:
Voor $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$, zij P_n de bewering: 'in elke verzameling van n mensen is iedereen op dezelfde dag jarig.'
STAP 1: Als we slechts één mens beschouwen is de bewering P_1 duidelijk juist.
STAP 2: Laat $n \geq 1$, en neem aan dat in elke verzameling van n mensen iedereen op dezelfde dag jarig is. Stel dat we nu $n+1$ mensen hebben. We kunnen ze nummeren: $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$. Beschouw nu de verzamelingen $A = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ en $B = \{m_2, \ldots, m_n, m_{n+1}\}$. Beide verzamelingen hebben n elementen en dus volgens de inductieveronderstellig is iedereen in A op dezelfde dag jarig, maar ook iedereen in B heeft de verjaardag op dezelfde dag. Hieruit volgt dat iedereen in $A \cup B$ ook op dezelfde dag jarig is.
Volgens het Principe van Volledige Inductie kunnen we concluderen dat P_n juist is voor elke $n \geqslant 1$, en dus zijn alle mensen op dezelfde dag jarig.

16. Bewijs de volgende eigenschappen van de binomiaalcoëfficiënten.

(a) Laat zien dat voor alle $1 \leqslant m \leqslant n$ de volgende identiteit geldt:

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}.$$

(b) Laat zien dat voor alle $1 \leqslant m \leqslant n$ de volgende identiteit geldt:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

(c) Toon aan: voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n.$$

(d) Toon aan: voor alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ geldt

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m = 0.$$

(e) Toon aan dat $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$ voor alle $n, m \in \mathbb{N}$ met $n \geqslant m$.

(f) Bewijs dat als n een priemgetal is dan is $\binom{n}{m}$ deelbaar door n voor elke $m \in \mathbb{N}$ met $1 \leqslant m \leqslant n-1$.

☆**17.** Toon aan dat $\binom{n}{k}$ het aantal manieren is om k mensen uit een groep van n mensen te kiezen.