Uitwerkingen II.1

Opgave II.1.1
Laat $a \in \mathbb{N}$ met $a \neq 0$. Bewijs uit de axioma's dat er een unieke $b \in \mathbb{N}$ is met $a = b + 1$.

UITWERKING:
Zij $a \in \mathbb{N}$ met $a \neq 0$. We laten eerst zien dat ten minste één $b \in \mathbb{N}$ bestaat met $a = b + 1$. Beschouw

$$A = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : \text{er is een } m \in \mathbb{N} \text{ met } n = m + 1\}.$$

Blijkbaar $0 \in A$. Als $n \in A$, dan zeker $n \in \mathbb{N}$, en dus $n + 1 \in A$. Volgens **(N6)** geldt nu $A = \mathbb{N}$. Aangezien $a \neq 0$, en ook $a \in A$, is er een $b \in \mathbb{N}$ met $a = b + 1$.

Nu moeten we bewijzen dat ten hoogste één zo'n $b \in \mathbb{N}$ bestaat. Neem aan dat $a \neq 0$, en $a = b+1$ en $a = b'+1$. Volgens **(N0)** geldt $b+1 = 1+b$ en $b'+1 = 1+b'$. Bijgevolg $1 + b = 1 + b'$ en volgens **(N3)** geldt $b = b'$.

Opgave II.1.5.(b)
Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$ de volgende formule geldt:[1] $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

UITWERKING:
STAP 1: Voor $n = 1$ geldt

$$\frac{1}{(2\cdot 1 - 1)(2\cdot 1 + 1)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 1 + 1}.$$

STAP 2: Laat $n \geq 1$. Neem aan dat voor een zekere $n \geq 1$ geldt:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

(dit is (I.V.)).
Dan geldt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
\overset{(IV)}{=}\ & \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
=\ & \frac{n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
=\ & \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
=\ & \frac{n+1}{(2n+3)}.
\end{aligned}$$

[1] Je mag ook eerst de linkerzijde schrijven als $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, en hiermee verder rekenen.

We hebben bewezen dat als de bewering waar is voor een $n \geq 1$ dan is hij ook waar voor $n+1$. Volgens het Principe van Volledige Inductie is de bewering waar voor elke $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Opgave II.1.8.
Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal $n \geq 4$ geldt $n! > 2^n$.

UITWERKING:
STAP 1: Voor $n = 4$ geldt $n! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ en $2^n = 2^4 = 16$ dus inderdaad $24 > 16$ dus de bewering is waar voor $n = 4$.
STAP 2: Zij $n \geq 4$ en neem aan dat geldt $n! > 2^n$ (dit is (I.V.)). We bewijzen dat $(n+1)! > 2^{n+1}$.

Er geldt

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{I.V}{>} (n+1) \cdot 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1};$$

de laatste ongelijkheid geldt omdat $n \geq 4 > 2$ en dus $n + 1 > 2$.

Volgens het Principe van Volledige Inductie voor elk natuurlijk getal $n \geq 4$ geldt $n! > 2^n$.

Opgave II.1.9.

Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal n het getal $11^n - 4^n$ deelbaar is door 7.

UITWERKING:

STAP 1: Het getal $11^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0$ is deelbaar door 7.
STAP 2: Stel dat $11^n - 4^n$ deelbaar is door 7 voor een natuurlijk getal n. Dan geldt:

$$\begin{aligned} 11^{n+1} - 4^{n+1} &= 11 \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n \\ &= 7 \cdot 11^n + 4 \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n \\ &= 7 \cdot 11^n + 4(11^n - 4^n). \end{aligned}$$

Uit de inductieveronderstelling volgt dat $11^n - 4^n$ deelbaar is door 7, dus het getal $7 \cdot 11^n + 4 \cdot (11^n - 4^n)$ is ook deelbaar door 7.