Opgave II.2.1a
Bewijs direct uit de axioma's voor $\mathbb{Z}$, dat voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$ geld: $-(a+b) = (-a) + (-b)$.

UITWERKING:
Het voldoet te laten zien dat $(a+b) + \big((-a) + (-b)\big) = 0$. Inderdaad als we dat hebben laten zien dat volgt dat $(-a) + (-b)$ de additieve inverse is van $a + b$. Er geldt

$$\begin{aligned}(a+b) + \big((-a)+(-b)\big) &\overset{(Z0)}{=} (b+a) + \big((-a)+(-b)\big)\\ &\overset{(Z1)}{=} \Big((b+a)+(-a)\Big) + (-b)\\ &\overset{(Z1)}{=} \Big(b + (a+(-a))\Big) + (-b)\\ &\overset{(i)}{=} \Big(b+0\Big) + (-b)\\ &\overset{Z2}{=} b + (-b)\\ &\overset{(i)}{=} 0\end{aligned}$$

In (i) gebruikten we de tekst onder (Z3).

Opgave II.2.6abc
Bewijs dat voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geldt:
(a) als $a|b$ en $a|c$, dan $a|(b+c)$
(c) als $a|b$ dan $a|bc$.

BEWIJS (a): Stel $a|b$ en $a|c$. Te bewijzen $a|(b+c)$. Uit het gegeven zien we dat er $x, y \in \mathbb{Z}$ bestaan zó dat $ax = b$ en $ay = c$. Definieer $z = x + y$. Dan volgt: $az = a(x+y) = ax + ay = b + c$. Conclusie $a|(b+c)$.

BEWIJS (c): Stel $a|b$. We tonen aan dat $a|bc$. Uit het gegeven blijkt dat er een $x \in \mathbb{Z}$ bestaat zó dat $ax = b$. Als we beide zijden met c vermenigvuldigen dan vinden we $(ax)c = bc$. Met andere woorden $a(xc) = bc$. Hieruit volgt $a|bc$.

Opgave II.2.7

Bewijs dat voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$ geldt dat als $a|b$ en $b|a$, dan $a = \pm b$

UITWERKING:
Dit is lastig! We doen alleen het geval dat $a, b \in \mathbb{N}$, en laat zien dat $a = b$. Laat eerst zien dat $xy = 1$ impliceert dat $x = y = 1$. Gebruik hier voor opgave 1 uit II.1 en de axioma's voor $\mathbb{N}$.

Opgave II.2.8.
Bewijs of weerleg: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geldt dat als $a \mid bc$, dan $a \mid b$ of $a \mid c$.

UITWERKING:
Deze bewering is niet waar. We geven een tegenvoorbeeld.

Neem $a = 4$, $b = 6$ en $c = 10$. Volgens Definitie II.2.1 geldt $4 \mid 6 \cdot 10$ want $4 \cdot 15 = 6 \cdot 10$ dus de vergelijking $4x = 6 \cdot 10$ heeft een oplossing $x = 15$ in $\mathbb{Z}$. Maar $4 \nmid 6$ en $4 \nmid 10$ want de vergelijkingen $4x = 6$ en $4x = 10$ hebben geen oplossing in $\mathbb{Z}$.

Opgave II.2.10.
Bewijs dat de getallen q en r in Stelling II.2.5 uniek zijn.

UITWERKING:

Neem aan dat $a = q' \cdot b + r'$ en $a = q \cdot b + r$, waarbij $q, q' \in \mathbb{Z}$ en $r, r' \in \mathbb{N}$ met $r < |b|$ en $r' < |b|$. Zonder beperking der algemeenheid kunnen we ook veronderstellen dat $r - r' \geq 0$. Dan geldt

$$0 = a - a = (q' - q) \cdot b + (r' - r).$$

Omdat $r < |b|$ en $r' < |b|$ is $r - r'$ een natuurlijk getal kleiner dan $|b|$. Aan de andere kant is $r - r' = (q' - q) \cdot b$ ook een veelvoud van b. Hieruit volgt dat $r - r' = 0$ en bijgevolg $q' - q = 0$, oftewel $r = r'$ en $q = q'$.