II.3 Equivalentierelaties en quotiënten

Een belangrijk begrip in de wiskunde is het begrip *relatie*. Een relatie op een verzameling is een verband tussen twee elementen uit die verzameling waarbij de volgorde in het algemeen van belang is: als we de relatie 'kleiner dan' op $\mathbb{R}$ beschouwen dan betekent $x < y$ iets anders dan $y < x$.

In het dagelijks leven komen relaties ook voor: twee mensen A en B kunnen bijvoorbeeld in relatie met elkaar zijn als 'A van B houdt'. Ook hier is de volgorde belangrijk; als A van B houdt hoeft B helemaal niet van A te houden.

We zullen nu het begrip relatie op een wiskundige manier formaliseren en de belangrijkste eigenschappen afleiden. We zullen ook een paar voorbeelden bestuderen die van belang in de wiskunde zijn.

Relaties

II.3.1 Definitie. Zij A een verzameling. Een *relatie* op A is een deelverzameling $\sim$ van het Cartesisch product $A \times A$.

We zeggen dat twee elementen a en b uit A in relatie $\sim$ zijn als $(a, b) \in \sim$. Notatie: $a \sim b$. We schrijven $a \not\sim b$ als $(a, b) \notin \sim$.

II.3.2 Voorbeeld. We bekijken de verzameling

$$\sim = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}.$$

Omdat $\sim$ een deelverzameling van het Cartesisch product $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is, is $\sim$ een relatie op $\mathbb{R}$. Blijkbaar $\sqrt{2} \sim 5$ want $\sqrt{2} < 5$, maar $2/3 \not\sim -\pi$ omdat $2/3 \not< -\pi$.

Het is gebruikelijk $x < y$ in plaats van $x \sim y$ te schrijven en we kunnen eenvoudig zeggen dat $\sim$ de relatie $<$ op $\mathbb{R}$ is.

II.3.3 Voorbeeld. We beschouwen nu de verzameling $\mathbb{Z}$ van alle gehele getallen. Het begrip 'deelbaarheid door 3' definieert een relatie op $\mathbb{Z}$: het getal a is in relatie met het getal b als hun verschil $a - b$ deelbaar is door 3. Deze relatie kunnen we $\sim$ noemen en we kunnen schrijven

$$a \sim b \qquad \text{dan en slechts dan als} \qquad 3 \mid (a - b).$$

Er geldt dus $14 \sim 5$ want $3 \mid 9 = (14 - 5)$, maar $14 \not\sim 6$ omdat $3 \nmid 8 = (14 - 6)$.

Equivalentierelaties

Een van de relaties die we dagelijks tegenkomen is de gelijkheid $=$; zijn basiseigenschappen zijn in de volgende definitie beschreven. Relaties die aan deze eigenschappen voldoen zijn bijzonder belangrijk in de wiskunde want ze helpen ons verzamelingen in delen met onderling equivalente elementen te verdelen.

II.3.4 Definitie. Een relatie $\sim$ op een verzameling A heet een *equivalentierelatie* als zij aan de volgende eisen voldoet:

(i) $\sim$ is *reflexief*, dat wil zeggen,

$$\text{voor alle } x \in A \text{ geldt } x \sim x;$$

(ii) $\sim$ is *symmetrisch*, dat wil zeggen,

$$\text{voor alle } x, y \in A \text{ geldt } (x \sim y) \Rightarrow (y \sim x);$$

(iii) $\sim$ is *transitief*, dat wil zeggen,

$$\text{voor alle } x, y, z \in A \text{ geldt } ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z).$$

II.3.5 Voorbeeld.

(i) We bewijzen dat de relatie $\sim$ uit Voorbeeld II.3.3 een equivalentierelatie is. Het is makkelijk in te zien dat $\sim$ reflexief is. Immers, voor alle $a \in \mathbb{Z}$ geldt $a - a = 0$ en $3 \mid 0$, dus $a \sim a$.
Neem nu aan dat $a \sim b$, dat wil zeggen, $3 \mid (a - b)$. Maar dan ook $3 \mid (b - a)$ en dus $b \sim a$. We hebben aangetoond dat $\sim$ symmetrisch is.
Om ook de transitiviteit te bewijzen laat $a, b, c \in \mathbb{Z}$ zijn met $a \sim b$ en $b \sim c$. Dan $3 \mid (a - b)$ en $3 \mid (b - c)$, en omdat $(a - b) + (b - c) = a - c$ volgt er $3 \mid (a - c)$. Maar $3 \mid (a - c)$ betekent $a \sim c$; het bewijs is dus voltooid.

(ii) Een ander voorbeeld van een equivalentierelatie is 'gelijkheid' $=$ (dit is eigenlijk een axioma uit de logica en verzamelingenleer).

(iii) De relatie $\leqslant$ op $\mathbb{R}$ is geen equivalentierelatie. Zij is wel reflexief (voor elke x geldt $x \leqslant x$) en transitief (als $x \leqslant y$ en $y \leqslant z$ dan ook $x \leqslant z$) maar $\leqslant$ is niet symmetrisch: $2 \leqslant 3$ maar $3 \nleqslant 2$.

Congruenties op $\mathbb{Z}$

We bestuderen nu speciale equivalentierelaties gedefinieerd op de verzameling $\mathbb{Z}$ van alle gehele getallen, die we soms ook *congruentierelaties* noemen.

Analoog als in Voorbeeld II.3.5 kunnen we bewijzen dat, voor elke $n \in \mathbb{Z}$ de relatie op $\mathbb{Z}$ gegeven door 'het verschil van a en b is deelbaar door n' een equivalentierelatie is. Voor $n \neq 0$ hebben we al gezien dat deze relatie de verzameling $\mathbb{Z}$ in $|n|$ disjunctie deelverzamelingen opsplitst:

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{k=0}^{|n|-1} k + n\mathbb{Z},$$

waarbij $n\mathbb{Z} + k$ de verzameling is van alle getallen die rest k hebben bij deling door n. We kunnen alle getallen die dezelfde rest hebben bij deling door n 'identificeren'; denk hierbij aan rekenen op de klok: tussen tijdstippen die 24 uur verschillen zie je geen verschil. Ook bij hoekmeting maken we vrijwel nooit verschil tussen hoeken die een veelvoud van 360 graden schelen.

II.3.6 Definitie. Zij $n \in \mathbb{Z}$. Twee gehele getallen k en l heten *congruent modulo n* als n het verschil $k - l$ deelt.
Notatie: $k \equiv l \pmod{n}$.

II.3.7 Voorbeeld. Voor $n, m \in \mathbb{Z}$ geldt $n \equiv m \pmod{2}$ precies dan als n en m beide even zijn, of beide oneven.

Equivalentie-klassen

Een equivalentierelatie op een verzameling verdeelt die verzameling in disjuncte deelverzamelingen, zoals we hierboven hebben gezien voor de congruentie relatie 'mod n' op $\mathbb{Z}$.

II.3.8 Definitie. Laat A een verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Voor $x \in A$ heet de verzameling $\overline{x} = \{y \in A : y \sim x\}$ de *equivalentieklasse* van x, voor $\sim$.

Als nodig zullen we de equivalentierelatie ook in deze notatie '$\overline{x}$' betrekken. Een equivalentieklasse is per definitie niet leeg.

II.3.9 Voorbeeld. Laat $n \in \mathbb{Z}$. Laat x in $\mathbb{Z}$. De equivalentieklasse van x voor de equivalentierelatie 'mod n' is

$$\overline{x} = \{x + nk : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Als de afhankelijkheid van n expliciet moet worden aangegeven schrijven we $\overline{x}_n$ voor de equivalentieklasse van x.

II.3.10 Stelling. Laat A een verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Voor alle $x, y \in A$ geldt:

$$x \sim y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}, \quad x \not\sim y \Leftrightarrow \overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$$

De verzameling A is dus de disjuncte vereniging van zijn equivalentieklassen, ofwel: A is gepartitioneerd door de equivalentieklassen.

Bewijs. Laat x en y in A zijn. Stel dat $x \sim y$. Voor iedere $z \in \overline{x}$ geldt per definitie dat $z \sim x$, en dus dat $z \sim y$ vanwege de transitiviteit van $\sim$. Dus geldt dat $\overline{x} \subset \overline{y}$. Maar dan geldt net zo goed dat $\overline{y} \subset \overline{x}$, want de situatie is symmetrisch in x en y (symmetrie van $\sim$) en dus dat $\overline{x} = \overline{y}$.

Stel nu dat $\overline{x} = \overline{y}$. Natuurlijk geldt dat $x \in \overline{x}$ (reflexiviteit), en dus $x \in \overline{y}$, en dus ook dat $x \sim y$. De eerste equivalentie is nu bewezen.

Stel nu dat $\overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$. Dan is x geen element van $\overline{y}$, en dus $x \not\sim y$. Als daarentegen $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \varnothing$, dan neem $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$ en constateer dat $z \sim x$, en dus ook $x \sim z$, en $z \sim y$, en dus (transitiviteit) $x \sim y$. ■

Quotiëntafbeelding

Het belangrijkste wat met een equivalentierelatie $\sim$ op een verzameling X gedaan kan worden is het vormen van een quotiëntafbeelding. In Opgave II.3.7 zien we dat voor $f: A \to B$ een afbeelding de relatie $\sim$ op A gegeven door $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ een equivalentierelatie is. We kunnen ons nu afvragen of er, omgekeerd, voor iedere equivalentierelatie er zo'n afbeelding is, en hoe uniek zo'n afbeelding is. De volgende definitie en stelling maken dit alles duidelijk.

II.3.11 Definitie. Zij A een verzameling, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Zij B een verzameling. Een afbeelding $q: A \to B$ heet een *quotiënt* voor $\sim$ als:

1. q is surjectief;
2. voor alle $x, y \in A$ geldt $x \sim y \Leftrightarrow q(x) = q(y)$.

II.3.12 Stelling. Zij A een verzameling, en $\sim$ een equivalentierelatie op A.

1. Laat $\overline{A} = \{\overline{x} : x \in A\}$, en laat $q: A \to \overline{A}$ gegeven zijn door $q(x) = \overline{x}$. Dan is q een quotiëntafbeelding.
2. Laat $q: A \to B$ en $q': A \to B'$ quotiëntafbeeldingen zijn. Dan is er een unieke afbeelding $f: B \to B'$ met $q' = f \circ q$. Deze afbeelding f is een bijectie.

Bewijs. 1. Elk element van $\overline{A}$ is van de vorm $\overline{x}$ voor een zekere $x \in A$, maar $q(x) = \overline{x}$ dus q is surjectief. Zij nu aan dat $x, y \in A$. Als $x \sim y$ dan geldt wegens Stelling II.3.10 dat $\overline{x} = \overline{y}$ en dus $q(x) = q(y)$. Omgekeerd, als $q(x) = q(y)$ dan geldt $\overline{x} = \overline{y}$ en met Stelling II.3.10 dus $x \sim y$.

2. Laat $q: A \to B$ en $q': A \to B'$ quotiëntafbeeldingen zijn. Laat

$$f = \{(q(x), q'(x)) : x \in A\} \subseteq B \times B'.$$

We bewijzen nu eerst dat f de grafiek van een functie van B naar B' is. Laat $b \in B$. Neem een $x \in A$ met $q(x) = b$ (surjectiviteit van q). Dan $(b, q'(x)) \in f$, dus er is minstens één $b' \in B'$ zodat $(b, b') \in f$. Stel nu dat (b, b'_1) en (b, b'_2) allebei in f zitten. Neem $x_1 \in A$ en $x_2 \in A$ met $(b, b'_1) = (q(x_1), q'(x_1))$ en $(b, b'_2) = (q(x_2), q'(x_2))$ (gebruik de definitie van f). Dan geldt $q(x_1) = b = q(x_2)$, en dus $x_1 \sim x_2$ (want q is een quotiëntafbeelding). Maar dan geldt ook dat $b'_1 = q'(x_1) = q'(x_2) = b'_2$, want q' is ook een quotiëntafbeelding. Vanwege de symmetrie in de situatie is f ook de grafiek van een functie van B' naar B, en dus de grafiek van een bijectie. Voor $x \in A$ geldt dan dat $f(q(x)) = q'(x)$, want $(q(x), q'(x)) \in f$. Omdat q een surjectie is, kan er hoogstens één $f: B \to B'$ zijn met $f \circ q = q'$. ■

II.3.13 Opmerking. Onderdeel 1 van de bovenstaande stelling zegt dat alle quotiëntafbeeldingen voor een vaste equivalentierelatie alleen op een administratieve wijze verschillen. Iedereen kan zijn/haar eigen favoriete quotiëntafbeeldingen kiezen. Laten we dit illustreren met een flauw voorbeeld. Laat $\sim$ de equivalentierelatie 'mod 0' op $\mathbb{Z}$ zijn. Dan is $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ een quotiënt, maar ook $q \colon \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Z}}$, met $\overline{\mathbb{Z}} = \{\{x\} : x \in \mathbb{Z}\}$, en $q \colon x \mapsto \{x\}$.

Een belangrijke toepassing van quotiënten naar equivalentierelaties is het construeren van $\mathbb{Z}$ uit $\mathbb{N}$, en $\mathbb{Q}$ uit $\mathbb{Z}$, en $\mathbb{R}$ uit $\mathbb{Q}$, waarbij men dan uit de axioma's voor $\mathbb{N}$ die van $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ kan bewijzen. Het mooie van dit alles is dat we, voor het werken met $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ alleen nog maar hoeven te geloven in de axioma's van verzamelingentheorie (ZFC, zie Appendix X.1); het bestaan van $\mathbb{N}$ (zie Appendix X.2), $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ volgt daar dan uit. We schetsen hier kort de constructie van $\mathbb{Z}$. We geven hieronder geen details, maar de lezer wordt dringend verzocht er minstens een paar in detail na te gaan.

Constructie van $\mathbb{Z}$

De axioma's voor $\mathbb{Z}$ impliceren dat ieder element van $\mathbb{Z}$ van de vorm $a - b$ is, met $a, b \in \mathbb{N}$. Bovendien geldt voor $a, b, a', b' \in \mathbb{N}$, dat

$$a - b = a' - b' \quad (\text{in } \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad a + b' = a' + b \quad (\text{in } \mathbb{N}).$$

Met andere woorden, de afbeelding

$$q \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}, \text{ met } q(a, b) = a - b$$

is een quotiëntafbeelding voor de volgende equivalentierelatie op $\mathbb{N}^2$:

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \Leftrightarrow \quad a + b' = a' + b.$$

Dit suggereert dat we $\mathbb{Z}$ uit $\mathbb{N}$ kunnen *construeren* als $\mathbb{N}^2/\sim$. Het is inderdaad mogelijk om uit de optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{N}$ een optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{N}^2/\sim$ te definiëren zodat

$$(\mathbb{N}^2/\sim, \overline{(0,0)}, \overline{(1,0)}, +, \cdot)$$

voldoet aan alle axioma's **(Z0)**–**(Z10)**.

Opgaven

1. Beschouw de volgende relaties op de verzameling $\mathbb{Z}$ van alle gehele getallen:

$$a \mid b \qquad \text{en} \qquad a^2 + a = b^2 + b.$$

Welke van deze twee relaties is
(a) reflexief,
(b) symmetrisch,
(c) transitief?

2. Laat, voor $n \in \mathbb{N}$, $E(n)$ het aantal equivalentierelaties zijn op $\{a \in \mathbb{N} : a < n\}$. Bereken $E(n)$ voor $0 \leq n \leq 4$.

3. Bewijs uit de axioma's voor $\mathbb{N}$ dat de relatie

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \Leftrightarrow \quad a + b' = a' + b$$

op $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ een equivalentierelatie is.

4. Zij $\sim$ de relatie op $\mathbb{Z}$ gedefinieerd door $x \sim y$ dan en slechts dan als $x - y$ een veelvoud van 7 is. Is $\sim$ een equivalentierelatie?

5. Zij A een verzameling. Welke van de volgende relaties op $\mathcal{P}(A)$ zijn reflexief, symmetrisch of transitief?

(a) V en W zijn gelijkmachtig,

(b) $V \subseteq W$,

(c) $V \cup W = A$.

6. Laat zien dat de relatie $\sim$ gedefinieerd op $\mathbb{R}$ door

$$x \sim y \qquad \text{dan en slechts dan als} \qquad |x| = |y|$$

een equivalentierelatie is.

7. Laat A en B verzamelingen zijn, en $f\colon A \to B$ een afbeelding. Bewijs dat de relatie $\sim$ op A gegeven door: $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ een equivalentierelatie is.