III DE REËLE GETALLEN

III.1 Algebraïsche structuur van reële getallen

We vervolgen onze axiomatische karakterisering van getalsystemen. Nu zijn de reële getallen aan de beurt, met de operaties van optelling en vermenigvuldiging, en de ordeningsrelatie. De axioma's geven we in drie delen, waarvan de eerste twee in deze sectie. Alle axioma's samen karakteriseren de reële getallen met hun optelling, vermenigvuldiging en ordening. Een constructie van $\mathbb{R}$ uit $\mathbb{Q}$ zullen we later nog schetsen.

Axioma's voor $\mathbb{R}$, deel 1

We geven nu een aantal gegevens en axioma's voor $\mathbb{R}$, de verzameling van reële getallen, met optelling en vermenigvuldiging. De gegevens zijn:

(a) een verzameling $\mathbb{R}$;
(b) elementen 0 en 1 in $\mathbb{R}$;
(c) een afbeelding $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
(d) een afbeelding $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
(e) een relatie $>$ op $\mathbb{R}$.

In deze paragraaf zullen we enkel de axioma's voor de optelling en vermenigvuldiging beschouwen, en in de volgende twee paragrafen zullen we de axioma's voor de relatie $>$ geven.

De eerste 9 axioma's zijn identiek aan die voor $\mathbb{Q}$. De optelling voldoet aan

(R0) de optelling is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt $a + b = b + a$;
(R1) de optelling is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt $(a+b)+c = a+(b+c)$;
(R2) 0 is *neutraal* voor de optelling, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt $0 + a = a$;
(R3) additieve inversen bestaan: voor iedere $a \in \mathbb{R}$ is er een $b \in \mathbb{R}$ met $a+b = 0$;

Met hetzelfde argument als voor $\mathbb{Z}$ kunnen we opnieuw bewijzen dat de additieve inverse van $a \in \mathbb{R}$ uniek is, en we noteren deze met $-a$. De vermenigvuldiging voldoet aan:

(R4) de vermenigvuldiging is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt $ab = ba$;
(R5) de vermenigvuldiging is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt $(ab)c = a(bc)$;
(R6) 1 is *neutraal* voor de vermenigvuldiging, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt $1 \cdot a = a$ en $a \cdot 1 = a$;
(R7) de *distributieve* eigenschap geldt: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt $a(b+c) = ab+ac$;
(R8) multiplicatieve inversen bestaan: voor iedere $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$ is er een $b \in \mathbb{R}$ met $ab = 1$;

Verder moeten we nog eisen

(R9) $0 \neq 1$;

De axioma's **(R0)**–**(R9)** drukken uit dat $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$ een *lichaam* is. Ook $\mathbb{Q}$ is een lichaam, maar $\mathbb{Z}$ is geen lichaam want bijvoorbeeld $2 \in \mathbb{Z}$ heeft geen multiplicatieve inverse.

Multiplicatieve inversen in $\mathbb{R}$ zijn uniek:

III.1.1 Propositie. Als $a, b, b' \in \mathbb{R}$ met $ab = 1$ en $ab' = 1$, dan $b = b'$.

Bewijs. Er geldt wegens **(R6)** en $ab' = 1$ dat geldt $b = (ab')b$. Analoog geldt ook $b' = (ab)b'$. Uit **(R4)** en **(R5)** volgt dat $(ab')b = (ab)b'$, en bijgevolg geldt $b = b'$. ■

We zullen de multiplicatieve inverse van $a \in \mathbb{R}$ (met $a \neq 0$) als $1/a$ of als a^{-1} noteren.

Als gevolg van het bestaan van multiplicatieve inversen vinden we ook een multiplicatieve schrappingswet:

III.1.2 Propositie. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $c \neq 0$. Als $ac = bc$ dan geldt $a = b$.

Bewijs. Neem aan dat $ac = bc$. Zij c^{-1} de multiplicatieve inverse van c. Er geldt dan

$$a = a \cdot 1 = a(cc^{-1}) = (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} = b(cc^{-1}) = b,$$

waar we naast de definitie van c^{-1} enkel axioma's **(R5)** en **(R6)** gebruikt hebben. ■

Net als in $\mathbb{Z}$ kunnen we nu ook voor $a, b \in \mathbb{R}$ het verschil definiëren: $a - b = a + (-b)$, en, als $b \neq 0$, het quotiënt $a/b = a \cdot b^{-1}$.

Uit de axioma's **(R0)**–**(R9)** kunnen we alle bekende rekenregels voor de reële getallen met optellen, vermenigvuldigen en delen afleiden; zie Opgaven III.1.3 en III.1.4 voor een aantal daarvan.

Er is, vanwege Stelling X.3.1, een unieke afbeelding $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ met $f(0) = 0$ en, voor alle $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = 1 + f(n)$. Deze afbeelding is injectief (Opgave III.1.6). Dan is er een unieke uitbreiding van f tot $\mathbb{Z}$ met de eigenschap dat voor alle $a, b \in \mathbb{N}$ geldt: $f(a - b) = f(a) - f(b)$; deze uitbreiding is ook injectief. Tenslotte kunnen we f uniek voortzetten tot $\mathbb{Q}$, met de eigenschap dat voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$ met $b \neq 0$ geldt: $f(a/b) = f(a)/f(b)$, en deze uitbreiding is ook injectief. Via deze $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ vatten we $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ op als deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

Opgaven

1. Bewijs de additieve schrapwet in $\mathbb{R}$: als $x, y, z \in \mathbb{R}$ met $x + y = x + z$ dan geldt $y = z$.

2. Bewijs dat de additieve inverse van een $x \in \mathbb{R}$ uniek is.

3. Bewijs slechts met behulp van de basiseigenschappen **(R0)** t/m **(R8)** de volgende rekenregels voor de reële getallen: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt

(a) $-(-a) = a$;

(b) $a \cdot 0 = 0$;

(c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;

(d) als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ dan is $a \cdot b \neq 0$;

(e) als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ dan geldt $(b \cdot a)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$;

(f) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$;

(g) als $a^2 = b^2$ dan is $a = b$ of $a = -b$.

4. Bewijs slechts met behulp van de basiseigenschappen **(R0)** t/m **(R8)** dat voor alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

(a) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

(b) $\dfrac{\frac{a}{b}}{d} = \dfrac{a}{bd}$;

(c) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$;

(d) $\dfrac{a}{b/d} = \dfrac{ad}{b}$.

5. Bewijs de volgende beweringen:

(a) Elke vergelijking $a + x = b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ heeft precies één oplossing in $\mathbb{R}$.

(b) Elke vergelijking $ax = b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ heeft precies één oplossing in $\mathbb{R}$.

✍ **6.** Laat zien dat de afbeelding $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ met $f(0) = 0$ en, voor alle $n \in \mathbb{N}$, $f(n + 1) = 1 + f(n)$, injectief is.