Uitwerkingen van III.1

Opgave III.1.3c
Voor alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Uitwerking opgave:
We hebben het volgende nodig: Uit (R7) en (R4) kunnen we laten zien dat de distributieve wet ook andersom geldt: voor alle $p, q, r \in \mathbb{R}$ geldt $(p+q)r = prqr$. Dit zullen we in het vervolg gebruiken en (R7') noemen.

Voordat we de gevraagde gelijkheid aantonen, laten we eerst zien dat

$$ad + bc = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)(bd). \tag{1}$$

Er geldt

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)(bd) \overset{\text{def}}{=} \left(ab^{-1} + cd^{-1}\right)(bd) \overset{(R7')}{=} (ab^{-1})(bd) + (cd^{-1})(bd) = (*)$$

Deze beide werken we apart uit

$$(ab^{-1})(bd) \overset{(R5)}{=} ((ab^{-1})b)d \overset{(R5)}{=} (a(b^{-1}b))d \overset{(R8)}{=} (a1)d \overset{(R4)}{=} (1a)d \overset{(R6)}{=} ad.$$

Op bijna dezelfde manier kun je inzien dat $(cd^{-1})(bd) = bc$. Substitutie in (*) geeft (1)

Om de opgave te beantwoorden noemen we $x = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ om kortere notatie te hebben. Uit (1) en het feit dat $bd \neq 0$ (zie opgave 1d) volgt nu dat

$$\frac{ad+bc}{bd} = (ad+bc)(bd)^{-1} = (x(bd))(bd)^{-1} \overset{(R5)}{=} x((bd)(bd)^{-1}) = x1 \overset{(R4)}{=} 1x \overset{(R6)}{=} x.$$

Dit bewijst het gevraagde.

Opgave III.1.5b
Bewijs de volgende bewering:
Elke vergelijking $ax = b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ heeft precies één oplossing in $\mathbb{R}$.

Uitwerking:

- We bewijzen eerst dat er tenminste één oplossing is.
  Omdat $a \neq 0$ bestaat $x = b \cdot a^{-1}$. Na invullen in de vergelijking krijgen we
  $$ax = a(b \cdot a^{-1}) = b \cdot (a \cdot a^{-1}) = b \cdot 1 = b;$$
  we hebben hier (R4) t/m (R8) gebruikt.
  We zien dat $x = b \cdot a^{-1}$ inderdaad een oplossing is.
- We bewijzen dat er ten hoogste één oplossing bestaat.
  Neem aan dat $ax = b$ en $ay = b$; we moeten aantonen dat $x = y$. Dan geldt (symmetrie en transitiviteit van =) dat $ax = ay$. Vermenigvuldig nu beide kanten met a^{-1}. Omdat $a \cdot a^{-1} = 1$ krijgen we met (R6) dat
  $$a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) \quad \text{en dus} \quad x = y.$$