## III.2 De ordening op $\mathbb{R}$ en ongelijkheden

In de vorige paragraaf hebben we axioma's gegeven voor de optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$, maar om $\mathbb{R}$ vast te leggen moeten we ook ongelijkheden in $\mathbb{R}$ beschouwen. In deze paragraaf beschrijven we de elementaire eigenschappen van de relatie $<$ op $\mathbb{R}$.

Axioma's voor $\mathbb{R}$, deel 2

De relatie $>$ op $\mathbb{R}$ voldoet aan volgende axioma's:

**(R10)** voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt precies één van de volgende drie gevallen: $a = b$, òf $a > b$, òf $b > a$;
**(R11)** voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt: als $a > 0$ en $b > 0$, dan $a + b > 0$ en $ab > 0$;
**(R12)** Voor elke $a, b \in \mathbb{R}$ geldt: $a > b$ dan en slechts dan als $a - b > 0$.

De axioma's **(R0)**–**(R12)** drukken uit dat $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, >)$ een *geordend lichaam* is.

Als $a > 0$ noemen we $a$ positief , en we schrijven $\mathbb{R}_{>0}$ voor de verzameling van positieve reële getallen.

We definiëren de relatie $<$ op $\mathbb{R}$ als volgt: voor $a$ en $b$ in $\mathbb{R}$ geldt: $a < b \Leftrightarrow b > a$.

Als $a < 0$ noemen we $a$ negatief.

We gebruiken $a \geqslant b$ als een afkorting van "$a > b$ of $a = b$" en zeggen dat $a$ groter dan of gelijk aan $b$ is; analoog definiëren we $a < b$ en $a \leqslant b$.

Merk op dat uit de axioma's volgt dat $<$ transitief is:

**III.2.1 Propositie** (transitiviteit van $>$). Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt: als $x > y$ en $y > z$ dan $x > z$.

*Bewijs.* Stel dat $x > y$ en $y > z$. Wegens **(R12)** geldt dan dat $x - y > 0$ en $y - z > 0$. Dus met **(R11)** volgt dat $(x - y) + (y - z) > 0$, en dus $x - z > 0$. Nogmaals toepassen van **(R12)** geeft dan $x > z$. ∎

**III.2.2 Gevolg.** $\leq$, $<$, $\geq$ zijn transitief.

Wegens de transitiviteit mogen we voortaan $x < y < z$ schrijven indien $x < y$ en $y < z$, en mogen we hieruit ook concluderen dat $x < z$.

**III.2.3 Propositie.** $1 > 0$.

*Bewijs.* Wegens **(R9)** geldt $1 \neq 0$, dus uit **(R10)** halen we dat ofwel $1 > 0$ ofwel $1 < 0$. Als $1 > 0$ valt er niks te bewijzen. Neem dus aan dat geldt $1 < 0$. Dan volgt uit **(R12)** dat $-1 > 0$, en uit **(R11)** dat $(-1)(-1) > 0$. Maar we hebben $1 = (-1)(-1)$, dus $1 > 0$. ∎

**III.2.4 Propositie.** Voor alle $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ geldt

(i) als $x < y$ dan $x + z < y + z$;
(ii) als $x < y$ en $z < t$ dan $x + z < y + t$;
(iii) als $x < y$ en $z > 0$ dan $x \cdot z < y \cdot z$;
(iv) als $x < y$ en $z < 0$ dan $x \cdot z > y \cdot z$;
(v) als $x > 0$ dan $1/x > 0$.
(vi) als $x > y > 0$ dan $1/y > 1/x$.

*Bewijs.* We bewijzen hier enkel (i) en (iii), voor de overige delen, zie Opgave III.2.3.

(i) Neem aan dat $x < y$. Wegens **(R12)** geldt dan $y - x > 0$, en dus ook $(y + z) - (z + x) > 0$. Nogmaals **(R12)** toepassen levert $y + z > x + z$, wat we moesten bewijzen.

(iii) Neem aan dat $x < y$ en $z > 0$. Met **(R12)** volgt dat $y - x > 0$ en met **(R11)** dat $z(y - x) > 0$. Dus $zy - zx > 0$, en met **(R12)** concluderen we dat $zy > zx$. ■

**III.2.5 Propositie.** Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$$xy > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x > 0 \text{ en } y > 0) \text{ of } (x < 0 \text{ en } y < 0)$$

en

$$xy < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x < 0 \text{ en } y > 0) \text{ of } (x > 0 \text{ en } y < 0).$$

In het bijzonder is $x^2 > 0$ als $x \neq 0$.

*Bewijs.* Opgave III.2.4. ■

Tenslotte voldoet de ordening aan het volgende axioma.

**(R13)** (Archimedische eigenschap) Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ is er een $n \in \mathbb{N}$ met $x < n$.

Dit heeft als gevolg dat tussen elk paar verschillende reële getallen een rationaal getal ligt!

**III.2.6 Stelling.** Zij $x, y \in \mathbb{R}$ met $x < y$. Dan bestaat er een $q \in \mathbb{Q}$ met $x < q < y$.

Voor het bewijs, zie Opgave III.2.7.

**III.2.7 Opmerking.** Men kan nagaan dat de ongelijkheid op $\mathbb{R}$ overeenkomt met de ongelijkheid op $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ gedefinieerd in II.1.

## Ongelijkheid van Bernoulli

Volgende ongelijkheid is soms erg nuttig.

**III.2.8 Stelling** (Ongelijkheid van Bernoulli)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$ en $x \in \mathbb{R}$ met $x \geq -1$. Dan geldt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Voor het bewijs, zie Opgave III.2.6.

## Absolute waarde

Iedere eindige niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een maximum. In het bijzonder definiëren we, voor iedere $x \in \mathbb{R}$, de *absolute waarde* van $x$ door

$$|x| = x \text{ als } x \geq 0, \text{ en } |x| = -x \text{ als } x < 0.$$

**III.2.9 Propositie.** Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$|x| = \max\{-x, x\}.$$

*Bewijs.* Ofwel geldt $x \geq 0$ ofwel $x < 0$. We beschouwen beide gevallen afzonderlijk.

In het eerste geval geldt $|x| = x$ en omdat $x \geq -x$ ook $\max\{-x, x\} = x$, dus de propositie geldt. In het tweede geval geldt $|x| = -x$ en omdat nu geldt $-x > x$ geldt ook $\max\{-x, x\} = -x$, wat we moesten bewijzen. ■

**III.2.10 Voorbeeld.** We zoeken alle oplossingen in $\mathbb{R}$ van de ongelijkheid

$$|x+2|+|x-5|+2x>|x|$$

Voor $x \leq -2$ geldt $|x+2| = -(x+2)$, en voor $x \geq -2$ geldt $|x+2| = x+2$, en natuurlijk gedragen $|x-5|$ en $|x|$ zich analoog in 5 en 0, respectievelijk. We verdelen daarom de reële rechte in vier intervallen: $(-\infty, -2)$, $[-2, 0)$, $[0, 5)$ en $[5, \infty)$, en lossen de ongelijkheid op elk interval apart.

Als $x \in (-\infty, -2)$ dan is $|x+2| = -x-2$, $|x-5| = -x+5$ en $|x| = -x$ en na invullen en vereenvoudigen krijgen we

$$x > -3.$$

Hieruit volgt dat op $(-\infty, -2)$ de oplossing is het interval $(-\infty, -2) \cap (-3, \infty)$, hetgeen gelijk is aan $(-3, -2)$.

Analoog (zie Opgave III.2.9) vinden we dat de oplossingen op $[-2, 0)$ het hele interval $[-2, 0)$ is, op $[0, 5)$ weer het hele interval $[0, 5)$ en op $[5, \infty)$ ook het hele interval $[5, \infty)$. De oplossingsverzameling van de ongelijkheid is dan

$$(-3,-2) \cup [-2,0) \cup [0,5) \cup [5,\infty) = (-3,\infty).$$

Driehoeks-ongelijkheid

De volgende ongelijkheid beschrijft een van de belangrijkste eigenschappen van de absolute waarde.

**III.2.11 Stelling** (Driehoeksongelijkheid)**.** Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

*Bewijs.* Uit Propositie III.2.9 volgt dat $-x \leqslant |x|$ en $-y \leqslant |y|$, zodat

$$-x-y \leqslant |x| + |y|.$$

Uit Propositie III.2.9 volgt eveneens dat $x \leqslant |x|$ en $y \leqslant |y|$, zodat

$$x+y \leqslant |x| + |y|.$$

Omdat of wel $|x+y| = x+y$ ofwel $|x+y| = -x-y$, concluderen we dat in elk geval $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. ■

**III.2.12 Gevolg** (Omgekeerde driehoeksongelijkheid)**.** Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

*Bewijs.* Opgave III.2.13 ■

**III.2.13 Opmerking.** Als $x$ en $y$ reële getallen zijn dan stelt $|y-x|$ de afstand van $x$ naar $y$ op de reële rechte voor. Uit de driehoeksongelijkheid volgt dat de afstand tussen twee reële getallen niet groter kan zijn dan de som van hun absolute waarden. De naam 'driehoeksongelijkheid' heeft meer te maken met afstanden in $\mathbb{R}^2$ of in $\mathbb{C}$, waar ze ook geldt, en waar ze echt met driehoeken te maken heeft.

Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde

Het is niet moeilijk om te bewijzen dat een product van twee getallen — bij vaste som — maximaal is als de factoren even groot zijn, en een som van twee niet-negatieve getallen minimaal — bij vast product — als de termen even groot zijn, zie Opgave III.2.15 en Opgave III.2.16.

De vraag is nu of dit verschijnsel zich voortzet: Is het product van $n$ getallen — bij vaste som — maximaal als alle factoren even groot zijn? Is de som van $n$ niet-negatieve getallen — bij vast product — minimaal als alle termen even groot zijn?

Het antwoord wordt gegeven door de volgende stelling. In deze stelling komen $n$-de wortels van reële getallen $x \geq 0$ voor; deze worden in de volgende paragraaf, in Opgave III.3.16 gedefinieerd.

**III.2.14 Stelling** (Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde)**.** Laat $n$ een positief natuurlijk getal zijn. Dan geldt voor elk $n$-tal niet-negatieve reële getallen $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ de volgende ongelijkheid

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

met gelijkheid dan en slechts dan als $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

*Bewijs.* Opgave III.2.19[1]. ■

**III.2.15 Opmerking.** Het getal $(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$ heet het *rekenkundig gemiddelde* van het $n$-tal $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, en het getal $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ heet het *meetkundig gemiddelde* van het $n$-tal $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$.

## Opgaven

**1.** Bewijs Propositie III.2.4, (i)–(iv).

**2.** Bewijs dat $-1 < 0$.

**3.** Bewijs Propositie III.2.4, (v)–(vi).

**4.** Bewijs Propositie III.2.5.

**5.** Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $x \leq y$ dan en slechts dan als voor alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt $x < y + \varepsilon$.

✍ **6.** Bewijs Stelling III.2.8. *Aanwijzing:* Gebruik inductie naar $n$.

☆✍ **7.** Bewijs dat tussen elk paar reële getallen $x < y$ een rationaal getal ligt.

✍ **8.** Vind alle oplossingen van de volgende ongelijkheden:
(a) $(x+1)(1-2x) > (x+1)$ met $x \in \mathbb{R}$;

[1] Een meer conceptueel bewijs kan gegeven worden door te gebruiken dat de functie $\ln\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ convex is. Deze convexiteit betekent dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ met $x < y$ het lijnstuk tussen de punten $(x, \ln x)$ en $(y, \ln y)$ onder de grafiek van ln ligt. Deze eigenschap volgt uit het negatief zijn van de tweede afgeleide van ln. De bovengenoemde opgave geeft een eenvoudiger bewijs.
Voor de functie ln wordt soms ook de notatie log gebruikt.

(b) $\dfrac{(x+1)^2}{x(x+2)} \geqslant 0$ met $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-2\}$;

(c) $4 + \dfrac{1}{x} \geqslant 0$ met $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(d) $x < \dfrac{2x-1}{x}$ met $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(e) $\dfrac{1}{2-x} \leqslant \dfrac{1}{2+x}$ met $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

**9.** Vul alle details van Voorbeeld III.2.10 in.

**10.** Los de volgende ongelijkheden op:

(a) $|2x-3| + |2-3x| \geqslant x - |x+5|$ met $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\dfrac{|x-1|}{x+1} < \dfrac{x+2}{|x-4|}$ met $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$;

(c) $|x^2 + 3x - 10| \leqslant 0$ met $x \in \mathbb{R}$;

**11.** Zij $x, y, t \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $|x-y| \leq |x-t| + |t-y|$.

**12.** Toon aan dat dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ en voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $|x^n| = |x|^n$.

✍**13.** Bewijs Gevolg III.2.12.

**14.** Zij $n \in \mathbb{N}$ en $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Bewijs met volledige inductie dat

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_i|\,.$$

**15.** Laat zien dat voor alle reële getallen $x$, $y$ en $c$ geldt: Het maximum van $xy$ onder de voorwaarde dat $x + y = c$ wordt aangenomen als $x = y$ en dat maximum is gelijk aan $c^2/4$. [2]

**16.** Laat zien dat voor alle positieve reële getallen $x$, $y$ en $c$ geldt: Het minimum van $x + y$ onder de voorwaarde dat $xy = c$ wordt aangenomen als $x = y$ en dat minimum is gelijk aan $2\sqrt{c}$.

**17.** Welk getal overschrijdt zijn kwadraat met het grootste bedrag?

**18.** Bewijs dat voor elk positief reëel getal $a$ geldt

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2.$$

Voor welke $a$ geldt gelijkheid?

✯**19.** Bewijs Stelling III.2.14.

(a) Laat $a$ en $b$ twee positieve reële getallen zijn. Toon aan

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Toon aan: als $a \neq b$ dan $ab < ((a+b)/2)^2$.

[2]Meetkundig betekent dit dat bij gegeven omtrek, de oppervlakte van een rechthoek maximaal is als de rechthoek een vierkant is.

(b) Bewijs nu de ongelijkheid van Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde voor twee getallen $a_1$ en $a_2$.

(c) Bewijs de ongelijkheid voor vier getallen $a_1$, $a_2$, $a_3$ en $a_4$. Hint: pas het geval $n = 2$ toe op het paar $a_1$ en $a_2$, het paar $a_3$ en $a_4$, en het paar $(a_1 + a_2)/2$ en $(a_3 + a_4)/2$

(d) Bewijs de ongelijkheid voor drie getallen $a_1$, $a_2$ en $a_3$. Hint: definiëer eerst $a_4 = (a_1 + a_2 + a_3)/3$ en pas dan het geval $n = 4$ toe.

(e) Bewijs, met volledige inductie naar $n$, de ongelijkheid voor $2^n$ getallen $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_{2^n}$.

(f) Bewijs: als de ongelijkheid voor $n$ getallen geldt dan geldt hij ook voor $n-1$ getallen.

(g) Bewijs de Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde.