Uitwerking III.2

Opgave III.2.2
Bewijs dat $-1 < 0$.

UITWERKING:
We weten uit (R9) dat één van de volgende mogelijkheden geldt: $1 = 0$ òf $1 > 0$ òf $1 < 0$. Uit (R8) volgt dat $1 \neq 0$, dus $1 = 0$ geldt niet. Er blijven 2 mogelijkheden over. Het voldoet nu te bewijzen dat $1 < 0$ tot een tegenspraak leidt. Neem aan dat $1 < 0$. Uit Propositie III.2.3 (iv) met $x = 1$, $y = 0$ en $z = 1$ volgt dat $1 = 1 \cdot 1 > 0 \cdot 1 = 0$. Dit geeft $1 > 0$, en is in tegenspraak met $1 < 0$.

Uit de rekenregels voor ongelijkheden volgt nu ook dat $-1 = 0 + (-1) < 1 + (-1) = 0$. Dus $-1 < 0$.

Opgave III.2.3
We bewijzen Propositie III.2.3 (v).

UITWERKING:
Neem aan dat $x > 0$. Stel dat $x^{-1} < 0$. Met Propositie III.2.3 (iv) volgt dat $1 = x \cdot x^{-1} < 0$. Dus $1 < 0$. Merk op dat we boven al gezien hebben[1] dat $1 > 0$. Dus er is een tegenspraak. Er volgt met (R9) dat $x^{-1} \geq 0$. Echter als $x^{-1} = 0$, dan zou volgen dat $1 = x \cdot x^{-1} = x \cdot 0 = 0$, en dit is niet waar. Conclusie $x^{-1} > 0$.

Opgave III.2.6
Bewijs Stelling III.2.7

UITWERKING:
Laat $x \in \mathbb{R}_{\geq -1}$. We bewijzen de ongelijkheid met behulp van volledige inductie.
STAP 1: Voor $n = 0$ zijn beide zijden gelijk aan 1.
STAP 2: Laat $n \in \mathbb{N}$, en neem aan dat $(1+x)^n \geq 1+nx$. Volgens de inductieveronderstelling geldt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Omdat $x \geq -1$ volgt uit de rekenregels voor ongelijkheden dat $1 + x \geq 0$ en dus volgt weer uit de rekenregels dat

$$(1 + x) \cdot (1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx).$$

Hieruit volgt (met rekenregels)

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^{n+1} & \geq & (1+x)\cdot(1+nx) \\ & = & 1+(n+1)x+nx^2 \\ & \geq & 1+(n+1)x. \end{array}$$

Hierbij gebruikten we dat $nx^2 \geq 0$ (zie Propositie III.2.4).

Opgave III.2.8a
Toon aan:

(a) Vind alle oplossingen van de volgende ongelijkheden: $(x + 1)(1 - 2x) > (x + 1)$, met $x \in \mathbb{R}$.

[1]Hiervoor hebben we ook alleen deel (iv) van propositie III.2.1 gebruikt

UITWERKING:
We onderzoeken drie gevallen (i) $x < -1$, (ii) $x > -1$, (iii) $x = 1$.

Geval (i) $x < -1$. Dan geldt $x{+}1 < 0$. Dus met de rekenregels voor ongelijkheden volgt

$$\begin{aligned} & (x+1)(1-2x) > (x+1) \\ \iff & 1-2x < 1 \\ \iff & -2x < 0 \\ \iff & x > 0. \end{aligned}$$

Aangezien ook $x < -1$ zijn er geen oplossingen in geval (1).

Geval (ii) $x > -1$. Dan geldt $x + 1 > 0$. Dus met de rekenregels voor ongelijkheden volgt

$$\begin{aligned} & (x+1)(1-2x) > (x+1) \\ \iff & 1-2x > 1 \\ \iff & -2x > 0 \\ \iff & x < 0. \end{aligned}$$

Aangezien ook $x > -1$, is het oplossingsinterval $(-1, 0)$.

Geval (iii) $x = -1$. Dan geldt $x + 1 = 0$. Dan geldt

$$\begin{aligned} & (x+1)(1-2x) > (x+1) \\ \iff & 0 < 0 \end{aligned}$$

en dat geldt nooit. Dus er zijn geen oplossingen.

Conclusie: uit bovenstaande drie gevallen volgt dat het oplossingsinterval van $(x + 1)(1 - 2x) > (x + 1)$ met $x \in \mathbb{R}$ gelijk is aan $(-1, 0)$.

Opgave III.2.10a
Toon aan:

(a) Los de volgende ongelijkheid op: $|2x-3|+|2-3x| \geq x-|x+5|$, met $x \in \mathbb{R}$.

UITWERKING:
We bekijken de volgende de gevallen: (i) $x \leq -5$, (ii) $-5 < x < 2/3$, (iii) $2/3 \leq x \leq 3/2$, (iv) $x > 3/2$

We werken alleen geval (iii) uit. (iii) $2/3 \leq x \leq 3/2$. Dan geldt

$$\begin{aligned} & |2x-3| + |2-3x| \geq x - |x+5| \\ \iff & -(2x-3) + -(2-3x) \geq x - (x+5) \\ \iff & x \geq -6 \end{aligned}$$

Dus het oplossings interval in geval (iii) is $[2/3, 3/2]$.

Geval (i) .... Geval (ii) .... Geval (iv) .... Conclusie oplossingsverzameling is $(-\infty, \infty)$.