III.3 Supremum en infimum

Zowel de reële getallen als de rationale getallen vormen geordende lichamen. Deze geordende lichamen zijn echter principieel verschillend. De verzameling $\mathbb{R}$ is bijvoorbeeld aanzienlijk groter dan de verzameling $\mathbb{Q}$. We hebben al vermeld dat een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$ bestaat maar geen bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$; de verzameling $\mathbb{Q}$ is aftelbaar en we zullen later bewijzen dat de verzameling $\mathbb{R}$ overaftelbaar is.

Het volgende voorbeeld illustreert een andere eigenschap van de reële rechte die de verzameling $\mathbb{Q}$ niet heeft maar die in de Analyse heel belangrijk is.

III.3.1 Voorbeeld. Bekijk maar eens de verzameling van alle rationale getallen met de eigenschap dat ze of negatief zijn of dat hun kwadraat niet groter dan 2 is:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x \geqslant 0 \text{ en } x^2 \leqslant 2\}.$$

Blijkbaar is elk rationaal getal $q < \sqrt{2}$ een element van A en het is ook niet moeilijk in te zien dat geen getal groter dan $\sqrt{2}$ element van A is. Het getal $\sqrt{2}$ markeert de overgang van A naar zijn complement $\mathbb{Q} \setminus A$: alle elementen van A liggen op de reële rechte *links* van $\sqrt{2}$, en alle elementen van $\mathbb{Q} \setminus A$ bevinden zich *rechts* van $\sqrt{2}$. Het 'grensgetal' $\sqrt{2}$ is echter *géén* rationaal getal, zie Stelling II.4.2; we zouden kunnen zeggen dat de verzameling $\mathbb{Q}$ 'gaten' bevat. ▬

De verzameling $\mathbb{R}$ heeft geen 'gaten'; om deze belangrijke eigenschap van $\mathbb{R}$ te kunnen formuleren geven we eerst enkele definities.

III.3.2 Definitie. Een deelverzameling V van $\mathbb{R}$ heet:

(i) *naar boven begrensd* als er een $x \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat $v \leqslant x$ voor alle $v \in V$. In deze situatie noemen we x een *bovengrens voor* V.

(ii) *naar beneden begrensd* als er een $x \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat $x \leqslant v$ voor alle $v \in V$. In deze situatie noemen we x een *ondergrens voor* V.

(iii) *begrensd* als V naar boven en naar beneden begrensd is.

III.3.3 Voorbeeld. De deelverzameling $\mathbb{N}$ van $\mathbb{R}$ is naar beneden begrensd (iedere $x \leqslant 0$ is een ondergrens) maar niet naar boven begrensd (dit is **(R13)**). De verzamelingen $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ zijn noch naar boven, noch naar beneden begrensd. De intervallen $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < x < 1\}$ en $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ zijn begrensd; in beide gevallen is iedere $x \geqslant 1$ een bovengrens en iedere $x \leqslant 0$ een ondergrens. ▬

III.3.4 Definitie. Zij V een deelverzameling van $\mathbb{R}$.

supremum

(i) Een element $x \in \mathbb{R}$ heet een *supremum* van V als het een *kleinste bovengrens* van V is, dat wil zeggen,
- x is bovengrens voor V, en
- als y een bovengrens voor V is, dan geldt $y \geqslant x$.

infimum

(ii) Een element $x \in \mathbb{R}$ heet een *infimum* van V als het een *grootste ondergrens* van V is, dat wil zeggen,
- x is ondergrens voor V, en
- als y een ondergrens voor V is, dan geldt $y \leqslant x$.

III.3.5 Opmerking. Suprema en infima van verzamelingen zijn (als ze bestaan!) uniek, daarom zeggen we *het* supremum, *de* kleinste bovengrens, *het* infimum en *de* grootste ondergrens.
Notatie: $\inf V$ voor het infimum, en $\sup V$ voor het supremum

III.3.6 Voorbeeld. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. We beweren dat $\sup{[a,b]} = b$. Het is duidelijk dat b een bovengrens is. Stel nu dat b niet de kleinste bovengrens is, dan is er dus een $c < b$ die een bovengrens is voor $[a, b]$. Maar dit is een tegenspraak, want $b \in [a, b]$ en $b > c$.

Een gelijkaardig argument bewijst dat $\inf{[a,b]} = a$. ∎

III.3.7 Voorbeeld. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. We gaan bewijzen dat $\sup{(a,b)} = b$.

In ieder geval is b een bovengrens. Stel dat b niet de kleinste bovengrens is. Dan is er een $c < b$ die ook een bovengrens is. Kies een $x \in (a, b)$. Dan geldt $c > x$ en dus ook $c > a$. Beschouw nu $y = (b + c)/2$. Er geldt $y \in (a, b)$ en $y > c$. Dit is een tegenspraak met de aanname dat c een bovengrens is.

Op dezelfde wijze kan men bewijzen dat $\inf{(a,b)} = a$. ∎

Axioma's voor $\mathbb{R}$, deel 3

We kunnen nu eindelijk het allerlaatste axioma voor de reële getallen formuleren.

(R14) (Fundamentele eigenschap van $\mathbb{R}$) Iedere niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een unieke kleinste bovengrens.

Deze eigenschap geldt niet voor de rationale getallen: neem bijvoorbeeld A uit Voorbeeld III.3.1. Dan is A naar boven begrensd en niet-leeg maar A heeft geen kleinste bovengrens *in* $\mathbb{Q}$.

III.3.8 Opmerking. Men kan bewijzen dat de lijst axioma's **(R0)**–**(R14)** het gegeven $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, >)$ karakteriseert, in dezelfde zin als we dat hebben geformuleerd voor $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$. Ook kan men bewijzen dat er zo'n gegeven bestaat, door een constructie te geven. Een schets van zo'n constructie volgt later (zie pagina 69).

Door Axioma **(R13)** toe te passen op $-V = \{-v : v \in V\}$ zien we dat iedere niet-lege naar beneden begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ een grootste ondergrens heeft.

III.3.9 Gevolg. Iedere niet-lege naar beneden begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een unieke grootste ondergrens.

In de volgende twee stellingen vatten we een aantal eigenschappen van sup en inf samen.

III.3.10 Propositie. Zij V een niet-lege begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$.

(i) Voor alle $d \in \mathbb{R}$ geldt $\sup\{v + d : v \in V\} = (\sup V) + d$;
(ii) Als $c \geq 0$ dan $\sup\{cv : v \in V\} = c \sup V$;
(iii) Als $c \leq 0$ dan $\sup\{cv : v \in V\} = c \inf V$.

Bewijs. Zie opgave III.3.8. ∎

III.3.11 Propositie. Laat A een niet-lege verzameling zijn. $f : A \to \mathbb{R}$ en $g : A \to \mathbb{R}$ functies zijn zó dat $f[A]$ en $g[A]$ begrensd zijn. Er geldt

(i) $\sup\{f(x) + g(x) : x \in A\} \leq \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}$.
(ii) Als voor alle $x \in A$ geldt dat $f(x) \geq 0$ en $g(x) \geq 0$, dan

$$\sup\{f(x)g(x) : x \in A\} \leq \sup\{f(x) : x \in A\} \sup\{g(x) : x \in A\}$$

en

$$\inf\{f(x)g(x) : x \in A\} \geq \inf\{f(x) : x \in A\} \inf\{g(x) : x \in A\}.$$

(iii) Als voor alle $x \in A$ geldt dat $f(x) \leq g(x)$, dan

$$\sup\{f(x) : x \in A\} \leq \sup\{g(x) : x \in A\}$$

en

$$\inf\{f(x) : x \in A\} \leq \inf\{g(x) : x \in A\}.$$

Bewijs. (i) Voor alle $x \in A$ geldt

$$f(x) + g(x) \leq \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}$$

en dus is het rechterlid een bovengrens voor $\{f(x) + g(x) : x \in A\}$. Aangezien $\sup\{f(x) + g(x) : x \in A\}$ de kleinste bovengrens is voor deze verzameling volgt dat

$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in A\} \leq \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}.$$

(ii) en (iii). Zie opgave III.3.9. ■

III.3.12 Definitie. Zij V een deelverzameling van $\mathbb{R}$. We noemen een element $v \in V$ een *maximum* van V als $v \geqslant u$ voor alle $u \in V$. We noteren dan $v = \max V$. Een *minimum* van V, notatie: $\min V$, wordt analoog gedefinieerd.

maximum
minimum

III.3.13 Voorbeeld. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$.

Het gesloten interval $[a, b]$ heeft b als maximum. Immers $b \in [a, b]$ en het is duidelijk dat voor alle $u \in [a, b]$ geldt dat $b \geqslant u$.

Het open interval (a, b) heeft geen maximum. Immers, neem aan dat $v \in (a, b)$ een maximum is. Beschouw dan $c = (b + v)/2$. Er geldt dat $v < c < b$. In het bijzonder is $c \in (a, b)$ maar geldt niet $v \geq c$, een tegenspraak.

Het verband tussen supremum en maximum is als volgt:

III.3.14 Stelling. Zij V een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. De volgende uitspraken zijn equivalent:

(i) V heeft een maximum;
(ii) V is naar boven begrensd en $\sup V \in V$.

In deze situatie geldt $\max V = \sup V$.

Bewijs. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Als V een maximum v heeft, dan is v een bovengrens voor V. We laten zien dat $v = \sup V$; dit geeft (ii). Stel eens dat w een bovengrens voor V is. Dan geldt $u \leqslant w$ voor alle $u \in V$, dus in het bijzonder $v \leqslant w$, want $v \in V$. Dit laat zien dat v de *kleinste* bovengrens van V is, dus $v = \sup V$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Zij $v = \sup V$; volgens aanname is $v \in V$. Omdat v een bovengrens voor V is, geldt $u \leqslant v$ voor alle $u \in V$. Dit laat zien dat v het maximum van V is. ■

III.3.15 Opmerking. Een analoge stelling geldt ook voor minima en infima.

Opgaven

1. Zij

$$V = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}.$$

(a) Laat zien dat 0 een ondergrens is voor V.

(b) Laat zien dat geen enkel reëel getal $x > 0$ een ondergrens is voor V.
Aanwijzing: Gebruik de Archimedische eigenschap.

(c) Concludeer dat $\inf V = 0$.

(d) Laat zien dat V geen minimum heeft.

✍ **2.** Bepaal het supremum, infimum, maximum en minimum van V in $\mathbb{R}$ of laat zien dat ze niet bestaan; geef ook alle benodigde bewijzen:

(a) $V = \{0\}$;

(b) $V = \big\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\big\}$;

(c) $V = \{\sin(n\pi/2) : n \in \mathbb{Z}\}$;

(d) $V = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ en } 1/x \geqslant 2\}$;

(e) $V = [-1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$. (*Hint*: gebruik stelling III.2.6)

3. Bewijs dat het supremum van een verzameling (als die bestaat) uniek is.

4. Zij V een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ een bovengrens van V. Toon aan dat $b = \sup V$ dan en slechts dan als voor alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ met $\varepsilon > 0$ er een $v \in V$ bestaat zodat $v > b - \varepsilon$.

5. Zij V een niet-lege en naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$, en zij W een niet-lege deelverzameling van V.

(a) Toon aan dat W naar boven begrensd is en dat $\sup W \leqslant \sup V$.
Aanwijzing: Iedere bovengrens voor V is ook een bovengrens voor W.

(b) Geef een voorbeeld waarbij $V \neq W$ en $\sup W = \sup V$.

✍ **6.** Zij V een niet-lege begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$. Toon aan:

(a) Voor alle $v \in V$ geldt
$$\inf V \leqslant v \leqslant \sup V.$$

(b) $\inf V = \sup V$ dan en slechts dan als V uit één element bestaat.

7. Bewijs Gevolg III.3.9 in detail.

8. Bewijs Propositie III.3.10.

9. Bewijs (ii) en (iii) van Propositie III.3.11.

10. Zij A, B niet-lege naar boven begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Bewijs of weerleg:

(a) als voor alle $a \in A$ en $b \in B$ geldt dat $a \leq b$, dan $\sup A \leq \inf B$;

(b) als voor alle $a \in A$ en $b \in B$ geldt dat $a < b$, dan $\sup A < \inf B$.

✍ **11.** Laat V en W niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn met maxima $\max V$ en $\max W$. Toon aan of weerleg:

(a) De vereniging $V \cup W$ heeft een maximum;

(b) Als $V \cap W \neq \varnothing$ dan heeft de doorsnede $V \cap W$ een maximum.

Geef in beide gevallen een formule voor het maximum indien het bestaat; geef anders een tegenvoorbeeld.

✍**12.** Bewijs of weerleg:

(a) Er is een $A \subseteq \mathbb{R}$ zó dat $\max A = \min A$.

(b) Er is een $A \subseteq \mathbb{R}$ zó dat $\max A$ of $\min A$ niet bestaat maar $\inf A = \sup A$.

13. Bewijs dat elke niet lege eindige deelverzameling van $\mathbb{R}$ een maximum en een minimum heeft.

14. Een deelverzameling V van $\mathbb{R}$ heet *open* als voor alle $v \in V$ er een $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zodat $(v - \varepsilon, v + \varepsilon) \subset V$.

✍ (a) Welk van de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn open: $\varnothing$, $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $(0,1)$, $(0,\infty)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\{0\}$.

✍ (b) Zij U, V open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Laat zien dat $U \cap V$ open is.

(c) Zij U, V open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Laat zien dat $U \cup V$ open is.

(d) Zij $(V_i)_{i\in I}$ een collectie open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Laat zien dat $\cup_{i\in I} V_i$ open is. Geef een voorbeeld waarbij $\cap_{i\in I} V_i$ niet open is.

(e) Zij $V \subset \mathbb{R}$ open, niet-leeg en naar boven begrensd. Laat zien dat $\sup V \notin V$.

✍**15.** Zij V een niet-lege, naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$. Laat zien dat de verzameling van alle bovengrenzen van V een minimum heeft. Wat is dit minimum?

$\sqrt[n]{x}$

16. Laat $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$, en laat $x \in \mathbb{R}$ met $x \geq 0$. Laat $V = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0} : y^n \leq x\}$.

(a) Laat zien dat V een supremum heeft.

✯ (b) Laat zien dat $\sup(V)^n = x$.

(c) Laat zien dat er een unieke $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ is met $y^n = x$. Deze y noemen we de (positieve) $n$de wortel uit x, en we noteren die als $\sqrt[n]{x}$, of ook als $x^{1/n}$.

(d) Laat zien dat voor $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $x \leq y$ geldt dat $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$.