Uitwerking III.3

Opgave III.3.2 (e)
Bepaal het supremum, infimum, maximum en minimum van $V = [-1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ of laat zien dat ze niet bestaan; geef ook alle benodigde bewijzen:

UITWERKING:

- We bewijzen dat $\sup V = \sqrt{2}$.
  Het is makkelijk te zien dat $\sqrt{2}$ een bovengrens is want voor elke $x \in V$ geldt $x \leq \sqrt{2}$.
  We bewijzen nu dat $\sqrt{2}$ de kleinste bovengrens is. Zij $y < \sqrt{2}$. Als $y < -1$ dan kan y geen bovengrens van V zijn want $-1 \in V$. Neem dus aan dat $-1 \leq y < \sqrt{2}$. Met behulp van Stelling III.2.5 kunnen we $q \in \mathbb{Q}$ vinden met $y < q < \sqrt{2}$. Omdat $q \in V$ is y geen bovengrens van V.
  We lieten zien dat $\sqrt{2}$ de kleinste bovengrens van V is en dus kunnen we concluderen dat $\sup V = \sqrt{2}$.
- De verzameling V heeft volgens Stelling II.4.2 geen maximum; dit volgt uit het feit dat $\sup V = \sqrt{2}$ en $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ dus ook $\sqrt{2} \notin V$.
- Voor elke $x \in V$ geldt dat $-1 \leq x$ en $x \in \mathbb{Q}$, dus -1 is een ondergrens van V. Omdat $-1 \in \mathbb{Q}$ volgt uit de definitie van minimum dat $\min V = -1$ en uit Stelling (II.6.10) dat $\inf V = \min V = -1$.

Opgave III.3.11
Laat V en W niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn met maxima $\max V$ en $\max W$. Toon aan of weerleg:

(a) De vereniging $V \cup W$ heeft een maximum;
(b) Als $V \cap W \neq \emptyset$ dan heeft de doorsnede $V \cap W$ een maximum.

Geef in beide gevallen een formule voor het maximum indien het bestaat; geef anders een tegenvoorbeeld.

UITWERKING:

(a) Noem $v = \max V$ en $w = \max W$ en zij $u = \max\{v, w\}$. We bewijzen dat $\max V \cup W = u$.
  Zij $x \in V \cup W$ willekeurig, dan $x \in V$ of $x \in W$. Als $x \in V$ dan geldt $x \leq v \leq u$ en als $x \in W$ dan geldt $x \leq w \leq u$. Hieruit volgt dat u een bovengrens van $V \cup W$ is.
  We moeten nog laten zien dat $u \in V \cup W$. Zonder beperking der algemeenheid kunnen we aannemen dat $v \leq w$ (het geval dat $w \leq v$ is analoog). Dan geldt $u = w \in W$ en $W \subseteq U \cup W$ dus $u \in U \cup W$.
(b) Deze bewering is niet waar; we geven een tegenvoorbeeld.
  Beschouw $V = (0, 2) \cup [4, 5]$ en $W = (-1, 1) \cup [6, 7]$. Dan is $V \cap W = (0, 1) \neq \emptyset$ want $1/2 \in V \cap W$.
  We bewijzen nu dat de verzameling $(0, 1)$ geen maximum heeft. We laten eerst zien dat $\sup(0, 1) = 1$.
  Voor elke $x \in (0, 1)$ geldt dat $x \leq 1$ dus 1 is een bovengrens van $(0, 1)$. Neem aan dat $y < 1$; we moeten aantonen dat y geen bovengrens van $(0, 1)$ is. We onderscheiden twee gevallen. Als $y \leq 0$ dan $1/2 \in (0, 1)$ en $1/2 > y$

dus is y geen bovengrens van $(0,1)$. In het andere geval geldt $0 < y < 1$. Maar dan geldt $0 < y < (y+1)/2 < 1$ en $(y+1)/2 \in (0,1)$ dus is y geen bovengrens van $(0,1)$. We lieten zien dat 1 de kleinste bovengrens van $(0,1)$ is dus $\sup(0,1) = 1$.

Omdat $1 = \sup(0,1) \notin (0,1)$ kunnen we volgens Stelling (2.6.10) concluderen dat $(0,1)$ geen maximum heeft.

Opgave III.3.14 Een deelverzameling V van $\mathbb{R}$ heet *open* als voor alle $v \in V$ er een $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zodat $(v-\epsilon, v+\epsilon) \subset V$. (a) Welk van de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn open: $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $(0,1)$, $(0,\infty)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\{0\}$.

(b) Zij U, V open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Laat zien dat $U \cap V$ open is.

UITWERKING: (a): ja, ja, neen, ja, ja, neen, ja, neen. We tonen aan dat $[0,1]$ niet open is. Neem $v = 1$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Er geldt $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ want $1 + \frac{\varepsilon}{2} \notin [0,1]$. Geef zelf de details in de andere gevallen.

(b) Zij $x \in U \cap V$. Dan is er een $\epsilon_1 > 0$ zodat $(x-\epsilon_1, x+\epsilon_1) \subset U$ en een $\epsilon_2 > 0$ zodat $(x-\epsilon_2, x+\epsilon_2) \subset V$. Neem nu $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Dan geldt $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset U \cap V$.

Opgave III.3.16 Laat $n \in N \setminus \{0\}$, en laat $x \in \mathbb{R}$ met $x \geq 0$. Definieer[1] $V = \{y \in \mathbb{R}_{>0} : y^n \leq x\}$.

(a) Laat zien dat V een supremum heeft.
(b) Laat zien dat $\sup(V)^n = x$.
(c) Laat zien dat er voor iedere $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ een unieke $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ is met $y^n = x$. Deze y noemen de (positieve) n-de wortel uit x, en we noteren die als $\sqrt[n]{x}$, of ook als $x^{1/n}$.
(d) Laat zien dat voor $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $x \leq y$ geldt dat $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$

UITWERKING: De filosofie van deze lastige opgave is dat het niet duidelijk is dat n-de machts wortels bestaan in $\mathbb{R}$ en uniek zijn. Dit is niet duidelijk en moet bewezen worden uit de axioma's. Essentieel hiervoor is het volledigheids axioma (R14). In het bijzonder volgt uit de opgave dat bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ een reeel getal is.

(a) Het voldoet te laten zien dat V niet-leeg is en naar boven begrensd (zie (R14)). We laten eerst zien dat V niet-leeg is. Definieer $t = \frac{x}{1+x}$. Dan geldt $0 < t < 1$ en $t^n \leq t \leq x$. Dus $t \in V$, en dus V is niet-leeg.

Vervolgens tonen we aan dat V naar boven begrensd is door $1 + x$. Inderdaad als $t > 1 + x$ dan geldt $t^n > t > x$, dus $t \notin V$.

(b) Definieer $y = \sup V$. Het geval $x = 0$ is eenvoudig, dan geldt $y = 0$ is de kleinste bovengrens. Neem nu aan dat $x > 0$. We tonen aan dat de twee andere mogelijkheden (i) $y^n > x$ en (ii) $y^n < x$ niet kunnen.

Stel (ii) geldt. We zoeken een $z > 0$ zó dat $y < z$ en $y^n < z^n < x$. Als we zo'n z gevonden hebben dan volgt $z \in V$. Maar aangezien $y < z$ volgt dat y geen bovengrens voor V is. Om zo'n z te vinden bekijk $y + \varepsilon$ en kies $\varepsilon \in (0, y)$ klein genoeg. Dit leggen we nu preciezer uit maar dit is iets lastiger. Merk op dat je uit Voorbeeld II.1.2 kunt afleiden dat

$$(y+\varepsilon)^n - y^n = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k y^{n-1-k} < \varepsilon n y^n.$$

---

[1]We passen de opgave iets aan door alleen getallen > 0 te nemen

We concluderen $(y+\varepsilon)^n < y^n + \varepsilon n y^n$. Definieer nu $\varepsilon = \frac{x-y^n}{ny^n}$. Dan volgt

$$(y+\varepsilon)^n < y^n + \varepsilon n y^n = y^n + x - y^n = x.$$

Definieer $z = y + \varepsilon$. Dan volgt $y < z$ en $y^n < z^n < x$.

Stel (i) geldt. We zoeken een $z > 0$ zó dat $y > z$ en $y^n > z^n > x$. Als we zo'n z gevonden hebben dan geldt z is een bovengrens van V. Inderdaad, als $v \in V$ voldoet aan $v^n \leq x$, dan geldt $v^n \leq x < z^n$. Dus ook $v < z$. Dit is in tegenspraak met het feit dat y de kleinste bovengrens van V is. Om zo'n z te vinden bekijken we $y - \varepsilon$ voor $\varepsilon > 0$ klein genoeg. Merk op

$$y^n - (y-\varepsilon)^n = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k y^{n-1-k} < \varepsilon n y^n.$$

We concluderen $(y-\varepsilon)^n > y^n - \varepsilon n y^n$. Definieer nu $\varepsilon = \frac{y^n-x}{ny^n}$. Dan volgt

$$(y-\varepsilon)^n > y^n - \varepsilon n y^n = y^n - (y^n - x) = x.$$

Definieer $z = y - \varepsilon$. Dan volgt $y > z$ en $y^n > z^n > x$.

(c) We hebben al gezien dat zo'n y bestaan in (b). We tonen aan dat y uniek is. Stel $w \geq 0$ is een getal wat voldoet aan $w^n = x$. Stel $w > y$. Dan volgt $x = w^n > y^n = x$ en dat kan niet. Stel $w < y$. Dan volgt $x = w^n < y^n = x$ en dat kan niet. Conclusie $w = y$.

(d) Stel $x, y \geq 0$ en $x \leq y$. Er zijn 2 mogelijkheden (i) $x = y$ of (ii) $x < y$. In geval (i) hebbben we in (c) gezien dat dat $x^{1/n} = y^{1/n}$. In geval (ii) volgt uit de rekenregels voor ongelijkheden dat $x^{1/n} < y^{1/n}$.