IV RIJEN

Een onmisbaar begrip in de Analyse is dat van een rij. Rijen worden overal gebruikt: om continue functies te beschrijven, bij benaderingen van oplossingen van vergelijkingen enzovoort. In dit hoofdstuk bestuderen we een aantal belangrijke eigenschappen van reële rijen.

IV.1 Rijen, convergentie en limiet

Rijen van reële getallen

In Paragraaf I.3 is al gezegd wat een rij is; we herhalen de definitie.

IV.1.1 Definitie. Zij A een verzameling. Een *rij* in A is een functie $a\colon \mathbb{N} \to A$. In plaats van $a(n)$ schrijven we meestal a_n en in plaats van $a\colon \mathbb{N} \to A$ schrijven we vaak $(a_n)_{n\geqslant 0}$ of $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De getallen a_n heten de *termen* van $(a_n)_{n\geqslant 0}$. Als $A = \mathbb{R}$ dan noemen we zo'n rij ook wel een reële rij.

In dit verband noemen we $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ de *indexverzameling* van de rij. Het is soms handiger om een andere indexverzameling te gebruiken, bijvoorbeeld $\{1, 2, 3, \dots\}$; in dat geval noteren we de rij als $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

Vaak is de rij door een expliciete formule voor de n-de term gegeven, zoals $a_n = 1/n$, $b_n = 2^{-n}$, $c_n = \sin n$ enzovoort. Deze rijen kunnen we dan noteren als $(1/n)_{n\geqslant 1}$, $(2^{-n})_{n\geqslant 0}$ en $(\sin n)_{n\geqslant 0}$. Minder formeel kunnen we een rij geven door een aantal termen uit te schrijven (indien de formule voor a_n duidelijk is); bijvoorbeeld: met $1, 1/3, 1/5, 1/7, \dots$ bedoelen we de rij $(1/(2n+1))_{n\geqslant 0}$.

IV.1.2 Definitie. Een reële rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ heet *convergent* wanneer er een $a \in \mathbb{R}$ bestaat met de volgende eigenschap: voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$\text{voor alle } n \geq N: \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

We noemen a een *limiet* van de rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$. Notatie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Een rij die niet convergent is heet *divergent*.

IV.1.3 Voorbeeld.

De rij $(1/n)_{n\geqslant 1}$

(a) We zullen aan de hand van bovenstaande definitie laten zien dat de rij $(1/n)_{n\geqslant 1}$ convergent is met limiet 0. Laat $\varepsilon > 0$. Uit de Archimedische eigenschap van

$\mathbb{R}$ volgt het bestaan van een $N \in \mathbb{N}$ met $N \geqslant 1$ en $1/N < \varepsilon$. Dan geldt voor alle $n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

(b) Constante rijen zijn convergent, zie Opgave IV.1.6.

(c) De rij $((-1)^n)_{n\geq 0}$ is divergent want geen enkel getal a voldoet aan de eisen uit Definitie IV.1.2. Neem maar eens aan dat er wel zo'n a was en neem $\varepsilon = 1/2$. Laat $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\left|(-1)^n - a\right| < 1/2$ voor alle $n \geqslant N$. Neem een even $n > N$, dan volgt dat $\left|1 - a\right| < 1/2$, Neem een oneven $n > N$, dan volgt dat $\left|-1 - a\right| < 1/2$. Maar dat kan niet want hier zou uit volgen dat

$$2 = \left|(1-a) - (-1-a)\right| \leq |1-a| + |-1-a| < 1.$$

∎

IV.1.4 Opmerking. Een rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ kan maximaal één limiet hebben. Stel maar eens dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ met $a \neq b$. Dan geldt $|a-b| > 0$. We leiden een tegenspraak af. Kies $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b|$. Uit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ volgt dat er een $N_1 \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat voor alle $n \geq N_1$ geldt $|a_n - a| < \varepsilon$. Uit $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ volgt dat er een $N_2 \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat voor alle $n \geq N_2$ geldt $|a_n - b| < \varepsilon$. Kies een $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Dan geldt dat

$$|a-b| = |(a-a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b|.$$

Ofwel $|a-b| < |a-b|$ en dat is onzin.

IV.1.5 Definitie. Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een reële rij. We zeggen dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een *begrensde rij* is als een reëel getal $M \geq 0$ bestaat zó dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $|x_n| \leqslant M$.

Analoog definiëren we naar boven en naar beneden begrensdheid.
Het volgende hulpresultaat is vaak handig.

IV.1.6 Propositie. Iedere convergente rij in $\mathbb{R}$ is begrensd.

Bewijs. Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een convergente rij in $\mathbb{R}$ met limiet x. We moeten laten zien dat er een $M \geq 0$ bestaat met $|x_n| \leqslant M$ voor alle $n \geqslant 0$. Kies een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $|x_n - x| < 1$ voor alle $n \geqslant N$. Zij $m = \max\{|x_k| : \ k = 0, \ldots, N-1\}$ en $M = \max\{m, |x|+1\}$. Het is duidelijk dat $|x_n| \leqslant m \leqslant M$ voor alle $0 \leqslant n \leqslant N-1$. Voor $n \geqslant N$ geldt

$$|x_n| = \left|x + (x_n - x)\right| \leqslant |x| + |x_n - x| \leqslant |x| + 1 \leqslant M.$$

∎

IV.1.7 Voorbeeld. Beschouw de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ gedefinieerd door $a_n = 2n$. De rij is niet begrensd en dus divergent. Om in te zien dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ niet begrensd is, kies $M \geq 0$ willekeurig. Kies $n \in \mathbb{N}$ zó dat $n > M/2$. Dan geldt $|a_n| = 2n > M$. ∎

De rij $(x^n)_{n\geqslant 0}$

IV.1.8 Stelling. Zij $x \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

(a) Als $|x| > 1$ dan is de rij $(x^n)_{n\geqslant 0}$ divergent.
(b) Als $|x| < 1$ dan $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.
(c) Als $x = 1$ dan $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$.
(d) Als $x = -1$ dan is de rij $(x^n)_{n\geqslant 0}$ divergent.

Bewijs. (a): Neem aan dat $|x| > 1$. We kunnen een $h > 0$ vinden zó dat $|x| = 1+h$. Uit de ongelijkheid van Bernoulli (zie Opgave III.2.6) volgt dat

$$|x^n| = |x|^n = (1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Hier volgt dat $(x^n)_{n\geq 0}$ niet begrensd is, en dus divergent.

(b): Zie Opgave IV.1.12.

(c): Dit is duidelijk, want $1^n = 1$ voor alle $n \geq 0$.

(d): Zie Voorbeeld IV.1.3 (c). ∎

Het is handig om ook een notatie in te voeren die beschrijft in welke zin een rij zoals $(2n)_{n\geq 0}$ divergeert.

IV.1.9 Definitie. We zeggen dat een rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ in $\mathbb{R}$ *naar* ∞ *divergeert*, notatie:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,$$

als er voor iedere $\xi \in \mathbb{R}$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat voor alle $n \geq N$: $x_n \geqslant \xi$.

Divergentie naar $-\infty$ wordt analoog gedefinieerd.

Het is wel gevaarlijk om te rekenen met divergentie naar ∞ en $-\infty$. Bedenk goed dat ∞ en $-\infty$ alleen symbolen zijn. Het zijn dus *geen* getallen.

IV.1.10 Voorbeeld. (a) Zij $a_n = 2n$ met $n \geq 0$. Laat $\xi \in \mathbb{R}$. Volgens de Archimedische eigenschap is er een $N \in \mathbb{N}$ met $N \geqslant \xi$. Voor alle $n \geqslant N$ geldt dan $2n \geqslant 2N \geqslant N \geqslant \xi$. We hebben bewezen dat $\lim_{n\to\infty} 2n = \infty$.

(b) Zij $a_n = n$, $b_n = -n$ en $c_n = -n+1$ met $n \geq 0$. Dan is $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ en $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$. Verder geldt dat de rij $(a_n + b_n)_{n\geq 0}$ is convergent met limiet 0. De rij $(a_n + c_n)_{n\geq 0}$ is convergent met limiet 1.

(c) Zij $a_n = n$, en $b_n = -n + (-1)^n$ met $n \geq 0$. Dan geldt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ $(a_n + b_n)_{n\geq 0}$ is divergent. Immers $a_n + b_n = (-1)^n$.

Blijkbaar kun je dus beter niet rekenen met ∞. ∎

Opgaven

1. Schrijf een paar termen van $(a_n)_{n\geqslant 0}$ op om een mogelijke limiet a af te leiden. Probeer vervolgens in elk geval hieronder een natuurlijk getal N te vinden zó dat $|a_n - a| < 1/2$ voor alle $n \geq N$, als gegeven wordt

(a) $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$;

(b) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$;

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$;

(d) $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$.

2. Beschouw dezelfde rijen als in de voorafgaande opgave.

(a) Vind voor elke $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$ een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

✍ (b) Herzie indien nodig uw keuze van a, en bewijs dat elke rij naar de gevonden waarde a convergeert.

Hint: Gebruik voor IV.1.1(d) de ongelijkheid van Bernoulli.

3. (a) Definieer de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ door $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Toon met behulp van de definitie aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Definieer de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ door $a_n = \sqrt{n}$. Toon met behulp van de definitie aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

4. Beschouw de rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$, waarbij $a_n = (4^n + 5^n)/(2^n + 3^n)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(a) Vind een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geqslant N$ geldt $a_n > 1000$.

(b) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

5. Beschouw $(a_n)_{n\geqslant 0}$ gedefinieerd voor elke $n \in \mathbb{N}$ als volgt: $a_{2n} = 2^{-n}$ en $a_{2n+1} = 0$. Bewijs met behulp van Definitie IV.1.2 dat de rij convergent is of laat zien dat de rij divergent is.

6. Bewijs dat een constante rij in $\mathbb{R}$ convergent is.

7. Wat kan men zeggen over een rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ als gegeven is dat de rij convergent is en elke a_n een geheel getal is? Vind eerst een paar voorbeelden.

8. Toon aan:

(a) Voor alle $k \in \mathbb{N}$ met $k \geq 1$ geldt $\lim_{n\to\infty} 1/n^k = 0$.

(b) Voor alle $n \geq 2$ geldt $\lim_{k\to\infty} 1/n^k = 0$.

9. Van een reële rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is gegeven

$$a_0 = 0 \quad \text{en voor } n \in \mathbb{N} \quad a_n + a_{n+1} = 2n - 1.$$

Vind en bewijs een algemene formule voor a_n.

10. Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een convergente rij in $\mathbb{R}$ met limiet x. Laat a en b in $\mathbb{R}$ met $a \leqslant b$.

(a) Toon aan: als $a \leqslant x_n \leqslant b$ voor alle n, dan geldt ook $a \leqslant x \leqslant b$.

(b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de volgende bewering niet juist is: als $a < x_n < b$ voor alle n, dan geldt ook $a < x < b$.

11. Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een rij zó dat $(x_{2n})_{n\geq 0}$ en $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergeren naar dezelfde limiet x. Toon aan dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergeert en $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

12. Bewijs Stelling IV.1.8 (b).