Uitwerking IV.1 en IV.2

Opgave bij IV.1.1a
We hebben $a_n = \frac{1}{2n+1}$. Er geldt dan

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1/3,\ a_2 = 1/5,\ a_3 = 1/7,\ a_4 = 1/9,\ a_5 = 1/11.$$

We vermoeden dat a_n convergeert naar 0. Dus definieer $a = 0$.

We zoeken een natuurlijk getal N zó dat voor alle $n \geq N$ geldt $|a_n - a| < 1/2$. Dit lijkt te kloppen voor $n \geq 1$, dus we proberen $N = 1$. Er geldt voor alle $n \geq N$ dat $2n + 1 \geq 2N + 1 = 3$, dus

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1} \leq 1/3 < 1/2.$$

Opgave IV.1.2a
We nemen het geval uit 1a. Kies $\varepsilon = 10^{-1}$. We zoeken een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N$ geldt $|a_n - a| < 10^{-1}$. Kies $N = 5$. Er geldt voor alle $n \geq N$ dat $2n + 1 \geq 2N + 1 = 11$, dus

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1} \leq 1/11 < 1/10 = \varepsilon.$$

Kies $\varepsilon = 10^{-2}$. We zoeken een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N$ geldt $|a_n - a| < 10^{-2}$. Kies $N = 50$. Er geldt voor alle $n \geq N$ dat $2n + 1 \geq 2N + 1 = 101$, dus

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1} \leq 1/101 < \varepsilon.$$

Opgave 4a en 5a zijn typisch dingen die je eerst op klad kunt proberen om een idee voor het precieze bewijs van $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ te krijgen. Een precies bewijs staat hieronder bij 5b.

Opgave IV.1 2b
We nemen weer het geval uit 1a. We bewijzen $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Uit Archimedische eigenschap (R12) volgt dat er een natuurlijk getal $N \in \mathbb{N}$ is zó dat $N > \frac{1}{2\varepsilon}$.

Kies $n \geq N$ willeurig. Er geldt $2N + 1 > \frac{1}{\varepsilon} + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dus ook

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2N+1} < \varepsilon.$$

Opgave IV.1.2b:
We tonen aan dat de rij uit 2b naar 1 convergeert. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. We moeten een $N \in \mathbb{N}$ vinden zó dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Er geldt

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Volgens Archimedische Eigenschap is er een $N \in \mathbb{N}$ met $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. We laten zien dat deze N als gewenst is.

Kies $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq N$ willekeurig. Dan geldt $1/(n + 1) \leq 1/(N + 1) < \varepsilon$. Dus

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Opgave bij IV.1.11
Zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een rij zó dat $(x_{2n})_{n\geq 0}$ en $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergeren naar dezelfde limiet x. Toon aan dat $(x_n)_{n\geq 0}$ convergeert en $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

UITWERKING:
Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N_1$ geldt dat $|x_{2n} - x| < \varepsilon$. Kies $N_2 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N_2$ geldt dat $|x_{2n+1} - x| < \varepsilon$. Kies $N = 1 + 2\max\{N_1, N_2\}$. Kies $k \geq N$ wilekeurig. Er zijn twee mogelijkehden (1) k is even of (2) k is oneven. (1): Laat $k = 2n$ met $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt $n \geq N/2 \geq N_1$ en dus

$$|x_k - x| = |x_{2n} - x| < \varepsilon.$$

(2): Laat $k = 2n + 1$ met $n \geq 1$, dan geldt $n \geq N/2 \geq N_2$ en dus

$$|x_k - x| = |x_{2n+1} - x| < \varepsilon.$$

Dit bewijst dat $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.