IV.2 Eigenschappen van convergente rijen

In deze paragraaf bespreken we enkele technieken om aan te tonen dat limieten bestaan en om ze te berekenen.

Rekenregels voor convergente rijen

We leiden enkele eigenschappen van convergente rijen af. Deze stellen ons in staat op een eenvoudige manier limieten te berekenen zonder terug te moeten gaan naar de oorspronkelijke definitie .

IV.2.1 Stelling (Rekenregels voor Limieten)**.** Laat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en $(y_n)_{n\geqslant 0}$ convergente rijen zijn met $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. De volgende uitspraken gelden:

(i) De rij $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$ is convergent en $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

(ii) Als $\alpha \in \mathbb{R}$ dan is de rij $(\alpha x_n)_{n\geqslant 0}$ convergent, en $\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha x$.

(iii) De rij $(x_n y_n)_{n\geq 0}$ is convergent en $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$.

(iv) Als $x \neq 0$, dan is $(\frac{1}{x_n})_{n\geq 0}$ convergent en $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x}$.

(v) De rij $(|x_n|)_{n\geqslant 0}$ is convergent, en $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

(vi) Als er een $k \geq 0$ is zó dat $x_n \leq y_n$ voor alle $n \geq k$, dan is $x \leq y$.

Bewijs. (i): Merk eerst op dat

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leqslant |(x_n - x)| + |(y_n - y)|.$$

Laat $\varepsilon > 0$. Neem N_1 en N_2 in $\mathbb{N}$ zó dat $|x_n - x| < \varepsilon/2$ voor alle $n \geqslant N_1$ en $|y_n - y| < \varepsilon/2$ voor alle $n \geqslant N_2$. Kies $N = \max\{N_1, N_2\}$. Met de opmerking aan het begin van het bewijs volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(ii): Het geval $\alpha = 0$ is duidelijk. Zij $\alpha \neq 0$. Laat $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zo groot dat voor alle $n \geqslant N$ geldt $|x_n - x| < \varepsilon/|\alpha|$. Voor alle $n \geqslant N$ geldt dan

$$|\alpha x_n - \alpha x| = |\alpha||x_n - x| < |\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon.$$

(iii): Merk eerst op dat uit de driehoeksongelijkheid volgt dat

$$|x_n y_n - xy| \leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| = |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x|. \tag{IV.1}$$

We zullen de beide laatste termen afschatten.

Wegens Propositie IV.1.6 geldt dat $(x_n)_{n\geq 0}$ een begrensde rij is. Zij $M \geq 0$ zó dat voor alle $n \geq 0$ geldt $|x_n| \leq M$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N_1$ geldt $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{|y|+1}$. Kies $N_2 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N_2$ geldt[1] $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{M+1}$.

Neem $N = \max\{N_1, N_2\}$. Met (IV.1) volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt dat

$$|x_n y_n - xy| \leq M\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{M+1} + |y|\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{|y|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iv): Merk op dat

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x - x_n}{x x_n}\right| = \frac{|x - x_n|}{|x|\,|x_n|}. \tag{IV.2}$$

[1]Merk op dat y of M gelijk aan nul zouden kunnen zijn. Daarom schrijven we $|y| + 1$ en $M + 1$ in de noemer.

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zo groot dat $|x_n - x| \leqslant |x|/2$ voor alle $n \geqslant N_1$. Dan volgt voor alle $n \geq N_1$ dat

$$|x| = |x_n + (x - x_n)| \leqslant |x_n| + |x - x_n| \leqslant |x_n| + \frac{|x|}{2}.$$

Hier zien we dat $|x_n| \geqslant |x|/2$ voor alle $n \geq N_1$. In het bijzonder is $x_n \neq 0$ voor alle $n \geqslant N_1$.

Kies $N_2 \in \mathbb{N}$ zo groot dat $|x_n - x| < \varepsilon|x|^2/2$ voor alle $n \geqslant N_2$. Neem $N = \max\{N_1, N_2\}$. Met (IV.2) volgt dat voor alle $n \geqslant N$ geldt:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| < \frac{\varepsilon|x|^2/2}{|x| \cdot |x|/2} = \varepsilon.$$

(v): Zie Opgave IV.2.1.

(vi): Beschouw de rij $(z_n)_{n\geqslant 0}$ gegeven door $z_n = x_n - y_n$ en definieer $z = x - y$. Dan geldt $z_n \leq 0$ voor alle $n \geq k$. Verder volgt uit (i) en (ii) dat $(z_n)_{n\geqslant 0}$ convergent is met $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Het voldoet te bewijzen dat $z \leq 0$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \geq k$ zó dat voor alle $n \geq N$ geldt $|z_n - z| < \varepsilon$. Dan volgt voor alle $n \geq N$ dat

$$z \leq z - z_n \leq |z - z_n| < \varepsilon.$$

Aangezien $\varepsilon > 0$ willekeurig is, volgt dat $z \leq 0$. ■

Insluitstelling

De volgende stelling stelt ons in staat met behulp van bekende convergente rijen limieten van meer ingewikkelde rijen te vinden.

IV.2.2 Stelling (Insluitstelling)**.** Laat $(x_n)_{n\geqslant 0}$, $(y_n)_{n\geqslant 0}$ en $(z_n)_{n\geqslant 0}$ reële rijen zijn met $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ voor alle $n \geqslant 0$. Neem voorts aan dat de rijen $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en $(z_n)_{n\geqslant 0}$ convergent zijn met limiet $a \in \mathbb{R}$. Dan convergeert de rij $(y_n)_{n\geqslant 0}$ eveneens, met limiet a.

Bewijs. Laat $\varepsilon > 0$. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zó dat $|x_n - a| < \varepsilon$ voor alle $n \geqslant N_1$. Kies $N_2 \in \mathbb{N}$ zó dat $|z_n - a| < \varepsilon$ voor alle $n \geqslant N_2$. Noem $N = \max\{N_1, N_2\}$, dan geldt voor alle $n \geqslant N$ dat

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$

en dus ook $|y_n - a| < \varepsilon$. ■

Voorbeelden

We beginnen met een voorbeeld van een toepassing van de insluitstelling.

IV.2.3 Voorbeeld. Beschouw de rij $((\sin n)/n)_{n\geqslant 1}$. Voor elke $n \geqslant 1$ geldt:

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

en ook geldt $\lim_{n\to\infty} -1/n = 0 = \lim_{n\to\infty} 1/n$. Volgens de Insluitstelling geldt dus $\lim_{n\to\infty} (\sin n)/n = 0$.

IV.2.4 Voorbeeld. Uit de rekenregels voor limieten en $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^7 + 3n^5 + 2n^4}{3n^7 + n^4 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{3 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}} = \frac{2+0+0}{3+0+0} = \frac{2}{3}.$$

Ten slotte nog enkele bijzondere limieten die we in een stelling formuleren.

IV.2.5 Stelling.

(i) Zij $p \in \mathbb{N}$ en $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < 1$. Dan geldt $\lim_{n\to\infty} n^p x^n = 0$.

(ii) Zij $a > 0$. Dan geldt $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a})_{n\geqslant 1} = 1$.

(iii) Er geldt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Bewijs. (i): Wegens Opgave IV.2.1 (c) voldoet het om $0 \leq x < 1$ te beschouwen. Het geval $x = 0$ is duidelijk. Neem aan $0 < x < 1$. Definieer $y = \sqrt[p+1]{x}$ en $z_n = (ny^n)^p$, $n \geq 1$. Dan geldt $0 < y < 1$, en voor alle $n \geq 1$ geldt

$$n^p x^n = n^p y^{n(p+1)} = n^p y^{np} y^n = z_n y^n.$$

Bewering: $(z_n)_{n\geq 1}$ is begrensd. Kies $h > 0$ zó dat $\frac{1}{y} = 1 + h$. Uit de ongelijkheid van Bernoulli volgt dat

$$\frac{1}{y^n} = (1+h)^n \geq 1 + nh.$$

We zien dus dat voor alle $n \geq 1$ geldt

$$0 \leq ny^n \leq \frac{n}{1+nh} = \frac{1}{\frac{1}{n} + h} \leq \frac{1}{h}.$$

Hieruit volgt dat $0 \leq (ny^n)^p \leq h^{-p}$ voor alle $n \geq 1$, en dit bewijst de bewering. Uit Stelling IV.1.8 volgt dat $\lim_{n\to\infty} y^n = 0$. Als we dit combineren met Opgave IV.2.2 dan vinden we $\lim_{n\to\infty} z_n y^n = 0$, en dit geeft het gevraagde.

(ii): Neem eerst aan dat $a \geq 1$. Dan geldt $\sqrt[n]{a} \geq 1$. Zij $n \geq 2$ willekeurig. Schrijf $a = a \cdot 1 \cdots 1$ met $n - 1$ maal een 1. Met behulp van de Ongelijkheid van het Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde (zie Opgave III.2.19) volgt dat

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot 1 \cdots 1} \leqslant \frac{a + (n-1)}{n} = \frac{a-1}{n} + 1.$$

Aangezien $\lim_{n\to\infty} \frac{a+1}{n} + 1 = 1$, volgt uit de insluitstelling dat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Stel nu $0 < a < 1$. Er geldt $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}}$. We weten dat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/a} = 1$. Dus uit de rekenregels voor limieten volgt dat ook in dit geval geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} = 1.$$

(iii): Zie Opgave IV.2.7.

∎

Opgaven

1. (a) Bewijs Stelling IV.2.1 (v).

(b) Geef een voorbeeld van een divergente rij $(x_n)_{n\geq 0}$ zó dat $(|x_n|)_{n\geq 0}$ convergeert.

(c) Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dan en slechts dan als $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

✍ **2.** Gegeven zijn de reële rijen $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en $(y_n)_{n\geqslant 0}$. Toon aan: als $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ en $(y_n)_{n\geqslant 0}$ is begrensd, dan geldt $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

3. Stel $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en $x \neq 0$, en $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{y}{x}$.

4. (a) Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergent en $(y_n)_{n\geqslant 0}$ divergent. Toon aan dat $(x_n + y_n)_{n\geqslant 0}$ divergeert.

✍ (b) Bewijs of weerleg: de som van twee divergente rijen is divergent.

✍ **5.** Deze som geeft een ander bewijs voor Stelling IV.2.1 (iii). Laat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en $(y_n)_{n\geqslant 0}$ rijen zijn met $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

(a) Laat met behulp van de definitie zien dat $\lim_{n\to\infty}(x_n - x)(y_n - y) = 0$.

(b) Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$.

✍ **6.** Construeer reële rijen $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ met $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ is divergent en zó dat

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$;

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -3$;

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$;

(d) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$;

(e) De rij $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ is divergent en $\lim_{n\to\infty} a_n b_n \neq \infty$ en ook $\lim_{n\to\infty} a_n b_n \neq -\infty$.

7. Bewijs Stelling IV.2.5 (iii). Hint: schrijf $n = \sqrt{n}\sqrt{n} \cdot 1 \cdots 1$ met $n-2$ maal een 1 en redeneer als in Stelling IV.2.5 (ii).

8. Laat $(a_n)_{n\geq 0}$ een reële rij zijn. Neem aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. Wat kan men zeggen over $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$?

✍ **9.** Laat $(a_n)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0}$ reële rijen zijn. Bewijs of weerleg: als $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ of $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

✍ **10.** Zij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de rij gegeven door $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

11. Bewijs dat rijen met de volgende termen convergeren en bereken hun limieten.

(a) $\frac{n^3+3}{n^3+4n+8}$. (b) $\frac{2^n+n^2}{3^n+5n^4}$. (c) $\frac{\sin(n)}{n+1}$. (d) $\sqrt[n]{n^2+n}$. (e) $\frac{n!}{n^n}$.

12. (a) Zij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ een convergente rij met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} = a \qquad (*)$$

(b) Verzin een rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ zó dat de limiet in $(*)$ bestaat, maar $(a_n)_{n\geqslant 0}$ divergent is.

13. Zij $k \in \mathbb{N}$. Bewijs $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}$.