Uitwerking IV.2

Opgave IV.2.2
Gegeven zijn de reële rijen $(x_n)_{n\geq 0}$ en $(y_n)_{n\geq 0}$. Toon aan: als $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ en $(y_n)_{n\geq 0}$ is begrensd, dan geldt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

UITWERKING: De rij $(y_n)_{n\geq 0}$ is begrensd. Kies $M \geq 0$ zodat $|y_n| \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Zij nu $\varepsilon > 0$. Omdat $(x_n)_{n\geq 0}$ naar 0 convergeert kunnen we een $N \in \mathbb{N}$ nemen zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat $|x_n| < \varepsilon/(M+1)$. Dan geldt, voor alle $n \geq N$, dat $|x_n y_n| < (\varepsilon/(M+1))\cdot M \leq \varepsilon$.

Opgave IV.2.9
Laat $(a_n)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0}$ reele rijen zijn. Bewijs of weerleg: als $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$, dan $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ of $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

UITWERKING: Dat is niet waar. Kies $a_{2n} = 1$ en $a_{2n+1} = 0$ en $b_{2n} = 0$ en $b_{2n+1} = 1$. Dan geldt $a_n b_n = 0$ voor alle $n \geq 0$. Maar de rijen (a_n) en (b_n) zijn niet convergent.

Opgave IV.2.6
Construeer reële rijen $(a_n)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0}$ met $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ en zó dat

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$;
(b) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -3$;
(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$;
(d) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$;
(e) $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ divergeert en $\lim_{n\to\infty} a_n b_n \neq \infty$ en ook $\lim_{n\to\infty} a_n b_n \neq -\infty$.

UITWERKING:

(a) We bewijzen eerst dat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$; zo'n N bestaat volgens de Archimedische Eigenschap. Dan geldt voor elke $n \geq N$
$$\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$
Nu bewijzen we dat $\lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$. Zij $\xi \in \mathbb{R}$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > \xi - 1$; zo'n N bestaat volgens de Archimedische Eigenschap. Dan geldt voor elke $n \geq N$
$$n+1 \geq N+1 > \xi.$$
Neem $(a_n)_{n\geq 0} = \big(1/(n+1)^2\big)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0} = (n+1)_{n\geq 0}$. Volgens Stelling IV.2.7(a) geldt
$$\lim_{n\to\infty} 1/(n+1)^2 = \lim_{n\to\infty} 1/(n+1) \cdot \lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0 \cdot 0 = 0$$
en $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0$.

(b) Neem $(a_n)_{n\geq 0} = (-3/(n+1))_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0} = (n+1)_{n\geq 0}$. Dan geldt $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -3$ want $(a_n b_n)_{\geq 0}$ is een constante rij is met termen gelijk aan -3.

(c) Neem $(a_n)_{n\geq 0} = (1/(n+1))_{n\geq 0}$ en$(b_n)_{n\geq 0} = \big((n+1)^2\big)_{n\geq 0}$. Analoog als in (a) kunnen we bewijzen dat $\lim_{n\to\infty}(n+1)^2 = \infty$. Dan geldt
$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$.

(d) Neem $(a_n)_{n\geq 0} = (-1/(n+1))_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0} = \big((n+1)^2\big)_{n\geq 0}$. Analoog als in (a) kunnen we bewijzen dat $\lim_{n\to\infty}(n+1)^2 = \infty$. Dan geldt
$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} -n-1 = -\infty$. Ook het bewijs dat $\lim_{n\to\infty} -n-1 = -\infty$ is analoog als in (a) en $\lim_{n\to\infty} -1/(n+1) = -\lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = -1 \cdot 0 = 0$ Volgens Stelling IV.2.7(a).

(e) Neem $(a_n)_{n\geq 0} = ((-1)^n/(n+1))_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0} = \big((n+1)^2\big)_{n\geq 0}$.

We bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$; zo'n N bestaat volgens de Archimedische Eigenschap. Dan geldt voor elke $n \geq N$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+1} - 0\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

We laten nu zien dat $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n(n+1) \neq -\infty$. Neem $\xi = -5$, zij $N \in \mathbb{N}$ willekeurig. Dan is $n = 2N \geq N$ en

$$(-1)^n(n+1) = (-1)^{2N}(n+1) = n+1 > -5.$$

Analoog kunnen we bewijzen dat $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n(n+1) \neq \infty$.