IV.3 Monotone rijen

De praktijk leert dat het vaak lastig is om rechtstreeks aan te tonen dat een gegeven rij convergeert; vaak hebben we niet eens een kandidaat voor de limiet. Om deze reden is het van belang om convergentiecriteria te hebben die alleen refereren aan de termen van de rij zelf en niet aan de eventuele limiet. Zo'n criterium gaan we nu afleiden.

IV.3.1 Definitie. Een rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ in $\mathbb{R}$ heet

- *stijgend* als $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots$;
- *strikt stijgend* als $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$.

Dalende en *strikt dalende* rijen worden analoog gedefinieerd. We noemen stijgende en dalende rijen *monotoon*.

IV.3.2 Voorbeeld.

(a) De rij $((-1)^n)_{n\geq 0}$ is niet stijgend en ook niet dalend (en dus ook niet monotoon).
(b) De rij $(n^3)_{n\geq 0}$ is strikt stijgend (en dus monotoon).
(c) De constante rij $(a_n)_{n\geq 0}$ gedefinieerd door $a_n = -2$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ is monotoon want hij is zowel dalend als stijgend, maar hij is *niet* strikt stijgend en ook *niet* strikt dalend.

Het supremum van een naar boven begrensde rij en het infimum van een naar beneden begrensde rij definiëren en noteren we als volgt:

$$\sup_{n\geqslant 0} x_n = \sup\{x_n : n \geqslant 0\} \quad \text{en} \quad \inf_{n\geqslant 0} x_n = \inf\{x_n : n \geqslant 0\}.$$

Monotone Convergentiestelling

IV.3.3 Stelling (Monotone Convergentiestelling)**.** Zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een stijgende en naar boven begrensde rij en definieer $x = \sup_{n\geq 0} x_n$. Dan geldt $(x_n)_{n\geq 0}$ is convergent en $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Bewijs. Definieer $V = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dan is V niet-leeg en naar boven begrensd. Wegens (R14) bestaat $x = \sup V$. Laat $\varepsilon > 0$. Omdat $x - \varepsilon$ geen bovengrens voor V is, bestaat een $v \in V$ met $x - \varepsilon < v$. Er geldt $v = x_N$ voor een zekere $N \in \mathbb{N}$. Voor alle $n \geqslant N$ geldt dan $x - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant x$, waarbij we gebruiken dat de rij stijgt en dat x een bovengrens is. Uit deze ongelijkheden volgt dat

$$|x_n - x| = x - x_n < \varepsilon \quad \text{voor alle } n \geqslant N.$$

■

Door de rij $(-x_n)_{n\geqslant 0}$ te beschouwen zien we dat een analoog resultaat geldt voor dalende, naar beneden begrensde rijen, zie Opgave IV.3.1.

Als toepassing van de Monotone Convergentiestelling geven we het volgende voorbeeld.

$\sqrt{c}$

IV.3.4 Voorbeeld. Neem een $c \geq 0$ vast. Definieer de rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ door

$$x_0 = 1 \quad \text{en} \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + c}{2x_n}.$$

voor $n \geqslant 0$. We bewijzen dat de rij convergent is en vinden zijn limiet.

Bewering 1: $x_n > 0$ voor alle $n \geq 0$. Dit kun je met inductie bewijzen.

Bewering 2: $x_n^2 \geq c$ voor alle $n \geq 1$. Inderdaad voor elke $n \geq 0$ geldt[2]

$$x_{n+1}^2 = \Big(\frac{x_n^2 + c}{2x_n}\Big)^2 = \frac{(x_n^2)^2 + c^2 + 2cx_n^2}{4x_n^2} \geq \frac{2cx_n^2 + 2cx_n^2}{4x_n^2} = c.$$

Bewering 3: $(x_n)_{n\geq 1}$ is dalend. Bewering 2 geeft dat $2x_n^2 \geq x_n^2 + c$. Aangezien $x_n > 0$ kunnen we delen door $2x_n$ en vinden we dat

$$x_n \geq \frac{x_n^2 + c}{2x_n} = x_{n+1}.$$

Aangezien $(x_n)_{n\geq 1}$ dalend is en naar beneden begrensd, volgt uit de Monotone Convergentiestelling IV.3.3 dat $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent is. Noem $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Verder volgt uit Beweringen 1 en 2 en rekenregels voor limieten dat $a \geq 0$ en $a^2 \geq c$, en dus $a > 0$. Er volgt dat

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + c}{2x_n} = \frac{a^2 + c}{2a}$$

waaruit volgt dat $2a^2 = a^2 + c$, ofwel $a^2 = c$. Aangezien $a > 0$ zien we dat $a = \sqrt{c}$. We hebben dus aangetoond dat de rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergent is met $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{c}$.

■

IV.3.5 Opmerking. (i) Met behulp van de Monotone Convergentiestelling zien we dus dat voor iedere $c > 0$ een wortel in $\mathbb{R}$ bestaat. We hebben zelfs een rij aangegeven die naar $\sqrt{c}$ toe convergeert. Als we zo'n benadering willen gebruiken dan moeten we natuurlijk weten hoe groot de "fout" is. Dit kunnen we als volgt inzien. Uit Bewering 2 volgt dat $x_n^2 \geq c$ voor alle $n \geq 1$. Dus met $x_n > 0$ volgt $x_n \geq \sqrt{c}$. Ook volgt hieruit dat $\frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{\sqrt{c}}$, en dus $\frac{c}{x_n} \leq \sqrt{c}$. We vinden dat

$$\frac{c}{x_n} \leq \sqrt{c} \leq x_n.$$

(ii) In Opgave IV.3.6 wordt $\sqrt[p]{c}$ met $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ en $c \geq 0$ geconstrueerd met behulp van een rij. We zullen ook soms schrijven $c^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{c}$ en $c^{\frac{m}{p}} = (\sqrt[p]{c})^m = \sqrt[p]{c^m}$.

$\sqrt[p]{c}$

De volgende stelling is een handig gevolg van de Monotone Convergentiestelling IV.3.3.

Stelling van Cantor

IV.3.6 Stelling (Cantor)**.** Zij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ een stijgende rij en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ een dalende rij in $\mathbb{R}$, zó dat $a_n \leq b_n$ voor alle $n \geq 0$, en $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$. Dan geldt dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ beide convergent zijn en $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Bewijs. Merk op dat $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$ voor alle $n \geq 0$. Hieruit volgt dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ naar boven begrensd is en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ naar beneden begrensd is. Uit de Monotone Convergentiestelling IV.3.3 volgt dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent zijn. Verder volgt uit de rekenregels van limieten en de aanname $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$ dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

■

De overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$

Met behulp van de Monotone Convergentiestelling IV.3.3 kunnen we nu de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ bewijzen.

IV.3.7 Stelling. De verzamelingen $\mathbb{R}$ en $(0,1)$ zijn overaftelbaar.

Bewijs. Aangezien $\mathbb{R}$ en $(0,1)$ gelijkmachtig zijn, voldoet het om aan te tonen dat $(0,1)$ overaftelbaar is. Stel $(0,1)$ is aftelbaar. We leiden een tegenspraak af.

Laat $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ een bijectie zijn.
Stap 1: Kies een $[a_0, b_0] \subseteq (0,1)$ met $b_0 - a_0 > 0$ en zó dat $f(0) \notin [a_0, b_0]$.
Stap 2: Recursief construeren we rijen $(a_n)_{n\geq 1}$ en $(b_n)_{n\geq 1}$ zó dat voor iedere $n \geq 1$

(i) $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$.
(ii) $f(n) \notin [a_n, b_n]$.
(iii) $b_n - a_n > 0$.

Stel dat $a_0, \ldots, a_n$ en $b_0, \ldots, b_n$ geconstrueerd zijn met de bovenstaande eigenschappen (i), (ii) en (iii). Uit (iii) volgt dat we $[a_n, b_n]$ kunnen schrijven als

$$[a_n, b_n] = [a_n, u_n] \cup [u_n, v_n] \cup [v_n, b_n],$$

met $a_n < u_n < v_n < b_n$. Er zijn 2 mogelijkheden: $f(n+1) \in [a_n, u_n]$ of $f(n+1) \notin [a_n, u_n]$. In het eerste geval kiezen we $a_{n+1} = v_n$ en $b_{n+1} = b_n$. In het tweede geval kiezen we $a_{n+1} = a_n$ en $b_{n+1} = u_n$. In beide gevallen gelden (i), (ii) en (iii) voor $n+1$.

Uit (i) volgt dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ stijgend is en naar boven begrensd door b_0. Uit de Monotone Convergentiestelling IV.3.3 volgt dat $x = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 0} a_n$ bestaat.
Bewering: $x \in [a_n, b_n]$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Zij $n \in \mathbb{N}$ willekeurig. Duidelijk is dat $a_n \leq x$. Aangezien voor alle $i \geq n$ geldt dat $a_i \leq b_i \leq b_n$, volgt uit de rekenregels van limieten dat $x = \lim_{i\to\infty} a_i \leq b_n$. Dit geeft de bewering.

Uit de surjectiviteit van f volgt dat er een $n \geq 0$ bestaat zó dat $f(n) = x$. Dus $f(n) = x \in [a_n, b_n]$. Dit is in tegenspraak met (ii). ∎

Opgaven

✍ **1.** Bewijs dat iedere dalende en naar beneden begrensde rij naar zijn infimum convergeert.

2. Neem $c = 2$ in Voorbeeld IV.3.4. Vind x_0 tot en met x_4. Controleer met Opmerking IV.3.5 hoe goed je benadering van $\sqrt{2}$ is.

3. Zij V een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Toon aan:

(a) Als V naar boven begrensd is dan bestaat er een rij $(v_n)_{n\geqslant 0}$ in V met de eigenschap dat $v_0 \leqslant v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots$ en

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \sup V.$$

Hint: Geef een recursieve constructie.

(b) Als V naar beneden begrensd is dan bestaat er een rij $(v_n)_{n\geqslant 0}$ in V met de eigenschap dat $v_0 \geqslant v_1 \geqslant v_2 \geqslant \cdots$ en

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \inf V.$$

[2] Gebruik $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

4. Geef in elk van de onderstaande gevallen een reële rij met de genoemde eigenschappen:

(a) De rij is strikt dalend met 0 als het infimum.

(b) De rij is stijgend met 5 als het supremum.

(c) De rij is noch dalend noch stijgend en heeft 0 als het infimum en 5 als het supremum.

5. De rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ is gedefinieerd door $x_0 = 2$ en $x_{n+1} = (1 + x_n)/2$ voor $n \geqslant 0$.

(a) Laat zien dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $x_n \geqslant 1$.

(b) Laat zien dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dalend is.

✍ (c) Bewijs dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergent is en vind zijn limiet.

$\sqrt[p]{c}$

☆ **6.** Neem een $c \in \mathbb{R}$ vast en $p \in \mathbb{N}$ met $p \geq 2$. Definieer de rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ door[3]

$$x_0 = 1 \quad \text{en} \quad x_{n+1} = \frac{(p-1)x_n^p + c}{p x_n^{p-1}}.$$

voor $n \geqslant 0$.

(a) Toon aan dat $x_n > 0$ voor alle $n \geq 0$.

(b) Toon aan dat $x_n^p \geq c$ voor alle $n \geq 1$.

(c) Concludeer dat $(x_n)_{n\geq 1}$ dalend is.

(d) Toon aan dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergeert naar $a > 0$, met $a^p = c$.

(e) Toon aan dat $\frac{c}{x_n^{p-1}} \leq \sqrt[p]{c} \leq x_n$ voor alle $n \geq 1$.

lim sup en lim inf

☆ **7.** Zij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en begrensde reële rij. We definiëren $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ en $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ als volgt:[4]

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geq n} a_k\big) \quad \text{en} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geq n} a_k\big).$$

(a) Bewijs dat $\liminf\limits_{n\to\infty}(-1)^n = -1$ en $\limsup\limits_{n\to\infty}(-1)^n = 1$.

(b) Bewijs dat voor elke begrensde rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ geldt dat $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ en $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ bestaan.

(c) Bewijs dat voor elke begrensde rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ geldt:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(d) Bewijs dat $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ dan en slechts dan als $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat. In dit geval geldt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

[3]De methode kan gebruikt worden om $f(x) = x$ op te lossen voor veel functies f en wordt de Newton-Raphson methode genoemd.

[4]De interpretatie is dat we het supremum/infimum nemen over een steeds kleiner wordende staart.