Uitwerking IV.3

Opgave IV.3.3

Zij V een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Toon aan:

(a) Als V naar boven begrensd is dan bestaat er een rij $(v_n)_{n\geq 0}$ in V met de eigenschap dat $v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \ldots$ en
$$\lim_{n\to\infty} v_n = \sup V.$$

Uitwerking:

(a) Definieer $M = \sup V$. Er zijn 2 mogelijkheden (i) $M \in V$, (ii) $M \notin V$. In geval (i) kunnen we $v_n = M$ nemen voor elke $n \geq 0$. Dit voldoet aan de gevraagde eigenschappen.

Geval (ii): We gebruiken een recursieve constructie. Dit kun je precies maken met volledige inductie.

Omdat V niet-leeg is vinden we een $v_0 \in V$. We construeren $(v_n)_{n\geq 1}$ zó dat voor alle $k \geq 1$ geldt
$$v_k > \max\{M - \frac{1}{k}, v_{k-1}\} \quad (*).$$
Stel $n \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $(v_k)_{k=0}^n$ zijn geconstrueerd zó dat $(*)$ geldt voor alle $k = 1, \ldots, n$. We construeren $v_{n+1} \in V$ zó dat $(*)$ geldt. Definieer $L = \max\{M - \frac{1}{n+1}, v_n\}$. Dan geldt dat $L < M$, en dus L is geen bovengrens voor V. Hieruit volgt dat we een $v_{n+1} \in V$ kunnen vinden zó dat $v_{n+1} > L$. Dit geeft $(*)$ voor $k = n+1$.

In het bijzonder volgt uit $(*)$ dat $v_n \geq v_{n-1}$ voor elke $n \geq 1$. Ook geldt $M - \frac{1}{n} < v_n < M$. We tonen aan dat $\lim_{n\to\infty} v_n = M$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zodat $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Voor alle $n \geq N$ volgt dat
$$|v_n - M| = M - v_n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$
Dit bewijst het gevraagde.

Opgave IV.3.1

Bewijs dat iedere dalende naar beneden begrensde rij naar zijn infimum convergeert.

Uitwerking: Neem een dalende naar beneden begrensde rij $(b_n)_{n\geq 0}$. Noem $b = \inf_{n\geq 0} b_n$. Definieer de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ door $a_n = -b_n$. Dan geldt (a_n) is stijgend en naar boven begrensd. Er geldt
$$\sup_{n\geq 0} a_n = \sup_{n\geq 0}(-b_n) = -\inf b_n = -b.$$
Met Stelling IV.2.10 volgt dat $\lim_{n\to\infty} a_n = -b$. Met Stelling IV.2.4.(i) volgt
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n = -(-b) = b.$$