Uitwerking IV.4

Opgave IV.4.1
Laat $(n_k)_{k\geq 0}$ een strikt stijgende rij natuurlijke getallen zijn. Bewijs met inductie dat voor elke $k \geq 0$ geldt dat $n_k \geq k$.

UITWERKING:
Stap 1: Omdat elke n_k een natuurlijk getal is geldt $n_0 \geq 0$.
Stap 2. (I.V.) Neem aan dat $n_k \geq k$ voor een bepaalde $k \in \mathbb{N}$. Omdat de rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt stijgend is geldt

$$n_{k+1} > n_k \overset{(I.V.)}{\geq} k.$$

Hieruit volgt dat $n_{k+1} > k$. Omdat n_{k+1} en k natuurlijke getallen zijn volgt nu dat $n_{k+1} \geq k+1$.

Opgave IV.4.6
Zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een rij in $\mathbb{R}$. Toon aan: als $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dan geldt $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ voor iedere deelrij $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ van $(x_n)_{n\geq 0}$.

UITWERKING:
Neem aan dat $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en zij $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ zijn deelrij. We bewijzen dat $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. We zoeken een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $k \in \mathbb{N}$ met $k \geq N$ geldt: $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$. Merk eerst op dat $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_k$ en dus $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Dus is er een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $k \geq N$ geldt $|x_k - x| < \varepsilon$. Maar uit Opgave IV.4.1 volgt dat $n_k \geq k \geq N$ en dus moet ook gelden dat $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$.

Opgave IV.4.10
Bewijs of weerleg: Als $(x_n)_{n\geq 0}$ en $(y_n)_{n\geq 0}$ reële Cauchy-rijen zijn dan is ook $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij.
UITWERKING:
De bewering is waar. Er zijn twee mogelijke uitwerkingen:

(i) Omdat Cauchy-rijen in $\mathbb{R}$ convergent zijn geldt dat $a, b \in \mathbb{R}$ bestaan met $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Volgens de rekenregels voor convergente rijen geldt dat $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$. De rij $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$ is convergent en dus een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$.

(ii) Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n, m \geq N_1$ geldt $|x_n - x_m| < \epsilon/2$. Kies $N_2 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n, m \geq N_2$ geldt $|y_n - y_m| < \epsilon/2$. Definieer $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dan volgt uit de driehoeksongelijkheid dat voor alle $n, m \geq N$ geldt:

$$|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Opgave IV.4.12 Construeer een reële rij $(x_n)_{n\geq 0}$ met de eigenschap dat iedere $x \in [0,1]$ de limiet is van een deelrij van $(x_n)_{n\geq 0}$.
UITWERKING:
De verzameling van alle rationale getallen is aftelbaar en dus kunnen we een aftelling $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ nemen. Beschouw de rij $(q_n)_{n\geq 0}$. Zij $x \in [0,1]$ willekeurig. Voor elke $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ kies een $n_k \in \mathbb{N}$ met telkens $n_k > n_{k-1}$ en zodanig dat

$$|x - q_{n_k}| < \frac{1}{k}.$$

Dan is $(q_{n_k})_{k\geq 0}$ een deelrij van $(q_n)_{n\geq 0}$ met

$$\lim_{n\to\infty} q_{n_k} = x.$$

Opgave IV.4.13
Laat zien dat er Cauchy rijen in $\mathbb{Q}$ bestaan die geen limiet in $\mathbb{Q}$ hebben.

UITWERKING:
In voorbeeld IV.3.4 met $c = 2$ is een rij gegeven. Je kunt met inductie bewijzen dat $x_n \in \mathbb{Q}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Verder geldt dat $(x_n)_{n\geq 0}$ convergeert naar $\sqrt{2}$. Dus $(x_n)_{n\geq 0}$ is een Cauchy rij in $\mathbb{Q}$, maar de limiet ligt niet in $\mathbb{Q}$.