IV.4 Volledigheid van $\mathbb{R}$

In de vorige paragraaf hebben we de Monotone Convergentiestelling bewezen, die een voldoende voorwaarde voor convergentie van monotone rijen geeft. In deze paragraaf bewijzen we de Volledigheidsstelling, die een criterium geeft voor convergentie van rijen die niet noodzakelijk monotoon zijn.

Allereerst introduceren we nieuwe notatie. Laat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ een rij reële getallen zijn en laat $(n_k)_{k\geq 0}$ een rij natuurlijke getallen zijn. We kunnen nu een nieuwe rij $(b_k)_{k\geq 0}$ definiëren door $b_k = a_{n_k}$ voor elke $k \geq 0$. Dus $(b_k)_{k\geq 0}$ is de rij[5]

$$a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots.$$

IV.4.1 Voorbeeld. Beschouw de rij $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ voor elke $n \geq 0$.

(a) Laat $n_k = 5k + 2$ voor alle $k \geq 0$. Dan geldt dat $a_{n_k} = \frac{1}{(5k+2)^2+1}$ voor alle $k \geq 0$.
(b) Laat $n_k = k$ voor alle $k \geq 0$. Dan geldt dat $a_{n_k} = \frac{1}{k^2+1}$ voor alle $k \geq 0$.
(c) Laat $n_k = 10$ voor alle $k \geq 0$. Dan geldt dat $a_{n_k} = \frac{1}{101}$ voor alle $k \geq 0$.

deelrij

IV.4.2 Definitie. Laat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ een rij reële getallen zijn en laat $(n_k)_{k\geq 0}$ een rij natuurlijke getallen zijn. Definieer de rij $(b_k)_{k\geq 0}$ door $b_k = a_{n_k}$ voor elke $k \geq 0$. Als $(n_k)_{k\geq 0}$ strikt stijgend[6] is, dan noemen we $(b_k)_{k\geq 0}$ een *d*eelrij van $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

Intuïtief is een deelrij rij dus de nieuwe rij die we krijgen als we een aantal termen uit een rij weglaten, mits er oneindig veel termen overblijven en de volgorde van termen niet veranderd wordt.

IV.4.3 Voorbeeld.

(a) Iedere rij is een deelrij van zichzelf: neem $n_k = k$.
(b) De rij $(2^{-n})_{n\geqslant 0}$ is een deelrij van $(a_n)_{n\geqslant 1}$ met $a_n = 1/n$: neem maar $n_k = 2^k$.
(c) De rij $2, 0, 6, 4, 10, 8, \ldots$ is geen deelrij van $(2n)_{n\geqslant 0}$ (de volgorde van termen is veranderd).
(d) De rij $(b_n)_{n\geqslant 0}$ met $b_n = 1$ is geen deelrij van $(a_n)_{n\geqslant 1}$ met $a_n = 1/n$.
(e) De rijen in (a) en (b) uit Voorbeeld IV.4.1 zijn deelrijen. De rij in Voorbeeld IV.4.1 (c) is geen deelrij, want $(n_k)_{k\geq 0}$ is niet strikt stijgend.

Stelling van Bolzano-Weierstrass

De volgende stelling zegt dat iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ een convergente deelrij heeft.

IV.4.4 Stelling (Bolzano-Weierstrass)**.** Zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een begrensde rij zijn. Dan geldt er bestaat een strikt stijgende rij natuurlijke getallen $(n_k)_{k\geq 0}$ zó dat $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ een convergente rij is.

Bewijs. Kies $a_0 < b_0$ beide in $\mathbb{R}$ zodanig dat $x_n \in [a_0, b_0]$ voor alle $n \geqslant 0$. We geven nu een recursieve constructie van reële rijen $(a_n)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0}$, zó dat voor alle $n \geq 1$ geldt dat

[5] Indien we de rij $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ als functie $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zien en de rij $f = (n_k)_{k\geq 0}$ als functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zien dan is $b = a \circ f$.

[6] Een strikt stijgende rij van indices zorgt ervoor dat de termen niet herhaald worden, dat er oneindig veel termen overblijven en dat de volgorde ook niet veranderd.

(i) $[a_{n-1}, b_{n-1}] \supseteq [a_n, b_n]$.
(ii) $[a_n, b_n]$ bevat x_j voor oneindig veel $j \in \mathbb{N}$.
(iii) $|b_n - a_n| = 2^{-n}|b_0 - a_0|$.

Stel we hebben $a_0, \ldots a_n$ en $b_0, \ldots, b_n$ met de bovenstaande eigenschappen geconstrueerd. We laten zien hoe we a_{n+1} en b_{n+1} kunnen vinden.

Zij $c_n = (a_n + b_n)/2$. Uit (ii) volgt dat er 2 mogelijkheden zijn: $[a_n, c_n]$ bevat oneindig veel x_j's of niet. In het eerste geval kiezen we $a_{n+1} = a_n$ en $b_{n+1} = c_n$. In het tweede geval moet wegens (ii), $[c_n, b_n]$ oneindig veel punten bevatten, en kiezen we $a_{n+1} = c_n$ en $b_{n+1} = b_n$. Dan gelden (i), (ii) en (iii) gelden voor $n+1$ (ga dit na!).

Wegens (ii) geldt dat $a_n \leq b_n$ voor elke $n \geq 0$. Dus met (i) volgt dat $(a_n)_{n\geq 0}$ stijgend is en $(b_n)_{n\geq 0}$ dalend is. Uit (iii) volgt dat $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$. Uit Stelling IV.3.6 volgt dat $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Uit (ii) volgt dat we een deelrij $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ kunnen vinden zó dat $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, en dus $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ voor elke $k \geq 0$. Met behulp van de insluitstelling vinden we dat $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ convergeert. ■

IV.4.5 Voorbeeld.

(a) Laat de rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ gegeven zijn door $a_n = (-1)^n$ voor $n \geq 0$. Aangezien $a_{2n} = 1$ en $a_{2n+1} = -1$ voor alle $n \geq 0$ volgt dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ minstens twee deelrijen heeft die convergeren. Namelijk $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$ en $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$.

(b) Definieer $(a_n)_{n\geqslant 0}$ door $a_n = \sin(n)$ voor $n \geq 0$. Aangezien $|a_n| \leq 1$, volgt uit de Stelling van Bolzano-Weierstrass IV.4.4 dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ een convergente deelrij heeft. In dit geval is het niet eenvoudig om zo'n deelrij expliciet aan te geven.

De Stelling van Bolzano-Weierstrass is handig, maar soms is het nuttig om ook nog een ander criterium voor convergentie te hebben. Hiervoor hebben we de volgende defintie nodig.

Cauchy-rij

IV.4.6 Definitie. Een rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ in $\mathbb{R}$ heet een *Cauchy-rij* als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat met de volgende eigenschap:

$$\text{voor alle } m, n \geq N : \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

IV.4.7 Voorbeeld.

(a) De rij $(1/(n+1))_{n\geq 0}$ is een Cauchy-rij. Immers, zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ met $N + 1 > 2/\varepsilon$ dan is $1/(N+1) < \varepsilon/2$. Hieruit volgt dat voor elke $m, n \geqslant N$ geldt:
$$\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \leqslant \frac{2}{N+1} < \varepsilon.$$

(b) De rij $((-1)^n)_{n\geq 0}$ is geen Cauchy-rij want voor $\varepsilon = 1$ bestaat geen $N > 0$ zó dat *voor alle* $n \geqslant N$ geldt $|(-1)^n - (-1)^m| < 1$: zij $N > 0$ en neem $n = N+1$ en $m = N$ dan geldt $|(-1)^n - (-1)^m| = |(-1)^{N+1} - (-1)^N| = 2 \not< 1$.

We zullen zo-dadelijk zien dat een reële rij precies dan convergeert wanneer hij een Cauchy-rij is. Eén helft van deze bewering is eenvoudig te bewijzen.

IV.4.8 Propositie. Laat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een reële rij zijn.

(i) Als $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergent is, dan is $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een Cauchy-rij.

(ii) Als $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een Cauchy-rij is, dan is $(x_n)_{n\geqslant 0}$ is begrensd.

Bewijs. (i): Zie Opgave IV.4.3.

(ii): Neem aan dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een Cauchy-rij is. We moeten laten zien dat er een $M \geq 0$ bestaat met $|x_n| \leqslant M$ voor alle $n \geqslant 0$. Kies een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $|x_n - x_m| < 1$ voor alle $m, n \geqslant N$. Zij $c = \max\{|x_k| : k = 0, \ldots, N\}$ en $C = c+1$. Voor $n = 0, \ldots, N$ is het duidelijk dat $|x_n| \leqslant c \leqslant C$. Voor $n \geqslant N$ geldt

$$|x_n| = |x_N + (x_n - x_N)| \leqslant |x_N| + |x_n - x_N| \leqslant c + 1 = C.$$

■

In de volgende stelling bewijzen dat iedere Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ is convergent is. Dit is de omkering van Propositie IV.4.8 (i).

Volledigheidsstelling

IV.4.9 Stelling (Volledigheidsstelling)**.** Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een Cauchy rij in $\mathbb{R}$. Dan geldt $(x_n)_{n\geqslant 0}$ is convergent.

Bewijs. Wegens Propositie IV.4.8 geldt dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ begrensd is. Uit de Stelling van Bolzano-Weierstrass volgt dat er een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ bestaat. Laat $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. We bewijzen dat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $m, n \geq N$ geldt dat $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$. Kies $k \geq N$ zó dat $|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2$. Aangezien $n_k \geq N$ volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

en dit bewijst het gevraagde. ■

Overzicht

Het Axioma (R14) over het bestaan van suprema speelt een belangrijke rol in dit hoofdstuk. Uitgaande van de (R0) tot en met (R13) kan men het volgende bewijzen:

IV.4.10 Stelling. De volgende uitspraken zijn equivalent:

(a) Iedere niet-lege naar boven begrensde verzameling $V \subseteq \mathbb{R}$ heeft een kleinste bovengrens.
(b) Iedere naar boven begrensde stijgende rij is convergent.
(c) Ieder begrensde rij heeft een convergente deelrij.
(d) Iedere Cauchy-rij is convergent.

Bewijs. (a) $\Rightarrow$ (b): Zie de Monotone Convergentiestelling IV.3.3.

(b) $\Rightarrow$ (c): Zie de Bolzano-Weierstrass Stelling IV.4.4.

(c) $\Rightarrow$ (d): Zie de Volledigheidstelling IV.4.9.

(d) $\Rightarrow$ (a). Zij $V \subseteq \mathbb{R}$ niet-leeg en naar boven begrensd. Zij $b_0 \in \mathbb{R}$ een bovengrens voor V. Er zijn 2 mogelijkheden: (1) b_0 is de kleinste bovengrens van V of (2) b_0 is niet de kleinste bovengrens voor V. In geval (1) zijn we klaar. In geval (2) kiezen we $a_0 \in V$ willekeurig, en merken op dat $a_0 < b_0$.

We geven nu een recursieve constructie van rijen $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ zó dat voor alle $n \geq 0$ geldt:

(i) $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$ als $n \geq 1$.
(ii) $a_n \in V$ en b_n is een bovengrens voor V.
(iii) $|b_n - a_n| \leq 2^{-n}|b_0 - a_0|$.

Stel we hebben $a_0, \dots a_n$ en $b_0, \dots, b_n$ met de bovenstaande eigenschappen geconstrueerd. We laten zien hoe we a_{n+1} en b_{n+1} kunnen vinden.

Zij $c_n = (a_n + b_n)/2$. Er zijn 2 mogelijkheden: (1) c_n is een bovengrens voor V of (2) c_n is geen bovengrens voor V . In (1) kies $a_{n+1} = a_n$ en $b_{n+1} = c_n$. In (2) kunnen we een $a_{n+1} \in V$ vinden zó dat $a_{n+1} > c_n$ en kiezen we $b_{n+1} = b_n$. Nu gelden (i), (ii) en (iii) voor $n + 1$ (ga dit na!).

Uit (i) en (ii) volgt dat $a_n \leq b_n$ voor elke $n \geq 0$, en $(a_n)_{n\geqslant 0}$ is stijgend en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ is dalend. We tonen aan dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ een Cauchy-rij is. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $2^{-N}|a_0 - b_0| < \varepsilon$. Zij $m, n \geq N$. We mogen aannemen dat $n \geq m$. Er volgt dat

$$0 \leq a_n - a_m \leq b_N - a_N \leq 2^{-N}|b_0 - a_0| < \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat $(a_n)_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij is, en dus wegens (d) is er een $a \in \mathbb{R}$ zó dat $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Bewering: a is de kleinste bovengrens voor V. Stel a is geen bovengrens voor V, dan is er een $x \in V$ zó dat $x > a$. Kies $\varepsilon > 0$ zó dat $x > a + \varepsilon$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N$ geldt dat $|b_n - a_n| < \varepsilon$. Er volgt dat voor alle $n \geq N$

$$b_n = (b_n - a_n) + (a_n - a) + a \leq |b_n - a_n| + a < \varepsilon + a < x.$$

Dit kan niet want b_n is een bovengrens voor V. We kunnen dus concluderen dat a een bovengrens is voor V. Stel a' is ook een bovengrens voor V. Dan geldt $a_n \leq a'$ voor alle $n \geq 0$. Met behulp van de rekenregels voor limieten volgt dat $a \leq a'$. Dus a is de kleinste bovengrens voor V. ■

Constructie van $\mathbb{R}$

We eindigen deze sectie met een zeer korte schets van een constructie van $\mathbb{R}$ uit $\mathbb{Q}$. Natuurlijk kunnen we dan $\mathbb{R}$ niet gebruiken tijdens deze constructie. Vandaar dat we opnieuw moeten definiëren wat een Cauchy-rij in $\mathbb{Q}$ is. Een rij $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ noemen we een Cauchy-rij als voor alle $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ er een $N \in \mathbb{N}$ is zo dat voor alle $m, n \in \mathbb{N}_{\geq N}$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Laat R de verzameling van alle Cauchy-rijen in $\mathbb{Q}$ zijn. Voor $a \in R$ zeggen we dat a limiet 0 heeft als voor alle $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ er een $N \in \mathbb{N}$ is zo dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$: $|a_n| < \varepsilon$. Op R hebben we dan de volgende equivalentierelatie:

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ heeft limiet } 0.$$

Men kan nu bewijzen:

IV.4.11 Propositie. De afbeelding $R \to \mathbb{R}$ die een Cauchy-rij a naar zijn limiet afbeeldt is een quotiëntafbeelding voor de equivalentierelatie $\sim$.

Deze propositie suggereert dat we $\mathbb{R}$ kunnen *construeren* als het quotiënt $R/\sim$. De equivalentieklassen van de constante rijen 0 en 1 geven elementen 0 en 1 in $R/\sim$, en het optellen en vermenigvuldigen van Cauchyrijen gaat over op operaties $+$ and $\cdot$ op het quotiënt $R/\sim$. Voor rijen $a, b \in R$ definiëren we $a > b$ als volgt: er is een $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ en een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ geldt dat $a_n > b_n + \varepsilon$. Ook deze relatie gaat over op het quotiënt $R/\sim$. Het is veel werk, maar niet echt moeilijk, te laten zien dat $(R/\sim, 0, 1, +, \cdot, >)$ aan alle axioma's **(R0)**–**(R14)** voldoet.

Opgaven

✍ **1.** Laat $(n_k)_{k\geq 0}$ een strikt stijgende rij natuurlijke getallen zijn. Bewijs met inductie dat voor elke $k \geq 0$ geldt dat $n_k \geq k$.

2. Laat $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ en $(c_n)_{n\geq 0}$ reële rijen zijn. Bewijs of weerleg:

(a) Als $(a_n)_{n\geq 0}$ niet naar boven begrensd is dan is ook geen van zijn deelrijen naar boven begrensd.

(b) Als $b \in \mathbb{R}$ een bovengrens van $(b_n)_{n\geq 0}$ is dan heeft elke van zijn deelrijen ook b als een bovengrens.

(c) Als $c \in \mathbb{R}$ het supremum van $(c_n)_{n\geq 0}$ is dan heeft elke van zijn deelrijen ook c als een supremum.

✍ **3.** Bewijs Propositie IV.4.8 (i).

4. Zij $x \leq -1$. Heeft de rij $(x^n)_{n\geq 0}$ een convergente deelrij?

5. Laat $(a_n)_{n\geq 0}$ een reële rij zijn. Bewijs dat $(a_n)_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij is dan en slechts dan als voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat

$$\text{voor alle } n \geq N : \quad |a_n - a_N| < \varepsilon.$$

✍ **6.** Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een rij in $\mathbb{R}$. Toon aan: als $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, dan geldt $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ voor iedere deelrij $(x_{n_k})_{k\geqslant 0}$ van $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

7. Laat $(x_n)_{n\geq 0}$ een reële Cauchy-rij zijn en neem aan dat een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ bestaat die naar $a \in \mathbb{R}$ convergeert. Bewijs dat $(x_n)_{n\geq 0}$ ook een convergente rij is met de limiet a.

Intervalneststelling **8.** Laat $(I_n)_{n\geq 0}$ een rij niet-lege intervallen zijn.

(a) Toon het volgende aan:

Als voor elke $n \geq 0$, I_n begrensd en gesloten is en $I_n \supseteq I_{n+1}$, dan is $\bigcap_{n\geq 0} I_n$ niet-leeg.

(b) Wat gebeurt er als we *gesloten* door *open* vervangen?

(c) Wat gebeurt er als we de begrensdheid weglaten?

★✍ **9.** Toon aan dat een begrensde rij in $\mathbb{R}$ dan en slechts dan convergent is als alle convergente deelrijen van de rij dezelfde limiet hebben.

✍ **10.** Bewijs rechtstreeks uit de definitie: Als $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en $(y_n)_{n\geqslant 0}$ reële Cauchy-rijen zijn dan is ook $(x_n + y_n)_{n\geqslant 0}$ een Cauchy-rij.

11. Noem twee Cauchy-rijen $(x_n)_{n\geq 0}$ en $(y_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$ equivalent als

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0.$$

Laat zien dat dit een equivalentie-relatie is.

✍ **12.** Construeer een reële rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ met de eigenschap dat iedere $x \in [0,1]$ de limiet is van een deelrij van $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

13. Laat zien dat er Cauchy-rijen in $\mathbb{Q}$ bestaan die geen limiet in $\mathbb{Q}$ hebben.