IV.5 De exponentiële functie

De exponentiële functie e^x (en algemener a^x met $a > 0$), is iedereen bekend. Maar hoe is deze functie precies gedefinieerd? En hoe leidt je de bekende eigenschappen van de e-macht af? In deze paragraaf geven we antwoorden op deze vraag. Er zijn echter vele equivalente definitie van de e-macht, zoals we zullen zien in andere paragrafen.

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

We onderzoeken eerst de rij met termen $(1+x/n)^n$ waarbij $n = 1, 2, \ldots$ en $x \in \mathbb{R}$.

IV.5.1 Lemma. Zij $x \in \mathbb{R}$. Zij $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zó dat $1 + x/N > 0$. Dan geldt $\left((1+x/n)^n\right)_{n\geqslant N}$ is een stijgende rij en $(1 + x/n)^n > 0$ voor alle $n \geq N$.

Bewijs. Merk op dat vooor alle $n \geq N$ geldt dat $1 + x/n > 0$, en dus ook $(1+x/n)^n > 0$ Uit de Ongelijkheid van Meetkundig en Rekenkundig Gemiddelde (zie Opgave III.2.19) met $n+1$ elementen volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \left(1+\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot 1\\
&\leq \left(\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)+\ldots\left(1+\frac{x}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}\\
&= \left(\frac{n+1+x}{n+1}\right)^{n+1}\\
&= \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

■

IV.5.2 Lemma. Zij $x \in \mathbb{R}$. Dan is de rij $\left((1+x/n)^n\right)_{n\geqslant 1}$ naar boven begrensd.

Bewijs. Neem $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zó dat $\left|\frac{x}{N}\right| < 1$. Uit Lemma IV.5.1 volgt dat $\left((1-x/n)^n\right)_{n\geqslant N}$ is stijgend en $(1 - x/n)^n > 0$ voor alle $n \geq N$. Hieruit volgt dat $\left(\frac{1}{(1-x/n)^n}\right)_{n\geq N}$ een dalende rij is en in het bijzonder geldt voor alle $n \geq N$ dat

$$\frac{1}{(1-x/n)^n} \leq \frac{1}{(1-x/N)^N}. \tag{IV.3}$$

Merk nu op dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right) = 1 - \frac{x^2}{n^2} \leq 1,$$

en dus voor alle $n \geq 1$ geldt

$$0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq 1.$$

Uit dit laatste en (IV.3) vinden we dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1-\frac{x}{N}\right)^N}.$$

Conclusie: $\left((1+x/n)^n\right)_{n\geqslant N}$ is naar boven begrensd. Hieruit volgt het gevraagde.

■

IV.5.3 Stelling. Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ is de rij $\Big((1+x/n)^n\Big)_{n\geqslant 1}$ convergent.

Bewijs. Dit volgt uit bovenstaande twee lemmas en de Monotone Convergentie-stelling IV.3.3. ■

IV.5.4 Definitie. De exponentiële functie $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n.$$

exp

Voor $x \in \mathbb{R}$ zien we uit bovenstaande lemmas dat voor $n \in \mathbb{N}$ voldoende groot $\exp(x) \geq \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n$ en dus $\exp(x) > 0$. Als $x > 0$ dan geldt zelfs dat $\exp(x) > 1$. Ook geldt dat $\exp(0) = 1$.

IV.5.5 Stelling. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt dat $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Bewijs. Neem $x, y \in \mathbb{R}$ vast. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > (1+|x|)(1+|y|)$ om te garanderen dat in de onderstaande berekening alle getallen positief zijn. Kies $n \geq N$ willekeurig. Uit de Ongelijkheid van het Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde (zie Opgave III.2.19) volgt dat

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{x+y}{n-1}\Big)^{n-1}\Big(1+\frac{xy}{n}\Big) &\leq \left[\frac{(n-1)\big(1+\frac{x+y}{n-1}\big)+\big(1+\frac{xy}{n}\big)}{n}\right]^n \\ &= \left[\frac{n+x+y+\frac{xy}{n}}{n}\right]^n = \left[1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right]^n \\ &= \left[\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\Big(1+\frac{y}{n}\Big)\right]^n.\end{aligned}$$

Dus we vinden dat

$$\Big(1+\frac{x+y}{n-1}\Big)^{n-1} \leq \left[\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\Big(1+\frac{y}{n}\Big)\right]^n$$

voor alle $n \geq N$. Door het nemen van limieten volgt dat

$$\exp(x+y) \leq \exp(x)\exp(y).$$

Om de omgekeerde ongelijkheid te vinden kun je een zelfde argument gebruiken. Er geldt

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n\Big(1+\frac{y}{n}\Big)^n &\leq \left[\frac{n\Big(1+\frac{x}{n}\Big)+n\Big(1+\frac{y}{n}\Big)}{2n}\right]^{2n} \\ &= \left[\frac{2n+x+y}{2n}\right]^{2n} = \left[1+\frac{x+y}{2n}\right]^{2n}.\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\exp(x+y) \geq \exp(x)\exp(y)$. We kunnen dus concluderen dat $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. ■

Herhaald toepassen van Stelling IV.5.5 geeft dat $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$.

Het getal e definiëren we als $e = \exp(1)$, dus

$$e = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n.$$

Er volgt dat $\exp(m) = e^m$ voor alle $m \in \mathbb{N}$.

Neem $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Uit Stelling IV.5.5 volgt dat

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right)^q = \exp\left(q\frac{p}{q}\right) = \exp(p).$$

Dus $\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \exp(p)^{1/q} = [\exp(1)^p]^{1/q} = e^{p/q}$. Stelling IV.5.5 geeft dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1.$$

Dus $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$. Als we bovenstaande combineren zien we dat

$$\exp(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{Q}.$$

Dit motiveert de schrijfwijze $e^x = \exp(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgaven

✍ **1.** Bewijs dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

☆✍ **2.** Bewijs: als $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een rij is zó dat $\lim_{n\to\infty} nx_n = 0$ dan geldt

$$\lim_{n\to\infty}(1 + x_n)^n = 1.$$

✍ **3.** Geef met behulp van Opgave IV.5.2 een alternatief bewijs van de regel $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ voor $x, y \in \mathbb{R}$.