Uitwerking IV.5

Opgave IV.5.1
Bewijs dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

UITWERKING:
Merk op dat wegens $\exp(x)\exp(-x) = 1$ volgt dat

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}.$$

Opgave IV.5.2 Bewijs: als $(x_n)_{n\geq 0}$ een rij is zó dat $\lim_{n\to\infty} nx_n = 0$, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^n = 1.$$

UITWERKING:
Merk op dat uit de rekenregels volgt dat ook $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Kies $N \geq 0$ zo groot dat voor alle $n \geq N$ geldt dat $|x_n| < 1$ en $n|x_n| < 1$.

Zij $n \geq N$. Er geldt $0 < (1 + x_n)(1 - x_n) = 1 - x_n^2 \leq 1$. Dus ook

$$0 < (1 + x_n)^n (1 - x_n)^n \leq 1 \quad (*)$$

Bewering:

$$1 - n|x_n| \leq (1 + x_n)^n \leq \frac{1}{1 - n|x_n|}.$$

Dit bewijzen we eerst in het geval dat $x_n \geq 0$. Er geldt dan

$$1 - n|x_n| \leq 1 \leq (1 + x_n)^n.$$

We tonen de andere afschatting $(1 + x_n)^n \leq \frac{1}{1-n|x_n|}$ aan. Uit $(*)$ en de ongelijkheid van Bernoulli volgt dat

$$(1 + x_n)^n \leq \frac{1}{(1 - x_n)^n} \leq \frac{1}{1 - nx_n}.$$

Als $x_n < 0$, dan geldt $(1 + x_n)^n \leq 1 \leq \frac{1}{1-n|x_n|}$. Uit de ongelijkheid van Bernoulli (herinner $x_n > -1$) volgt dat $1 - nx_n \leq (1 + x_n)^n$. Dit bewijst de bewering.

Merk op dat uit de aanname en de rekenregels voor ongelijkheden volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} 1 - n|x_n| = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - n|x_n|} = 1.$$

Het gevraagde volgt nu uit de bewering en de Insluitstelling.

Opgave IV.5.3
Geef met behulp van Opgave IV.5.2 een alternatief bewijs van de regel $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ voor $x, y \in \mathbb{R}$.
UITWERKING:
Laat x en y vaste reële getallen zijn. We moeten aantonen

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n.$$

We delen $(1 + x/n)(1 + y/n)$ door $(1 + (x + y)/n)$:

$$\frac{(1 + \frac{x}{n})(1 + \frac{y}{n})}{1 + \frac{x+y}{n}} = \frac{(n + x)(n + y)}{n(n + x + y)} = 1 + \frac{xy}{n(n + x + y)}.$$

Uit deze twee identiteiten en Opgave IV.5.2 volgt nu dat

$$\frac{e^x \cdot e^y}{e^{x+y}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{xy}{n(n + x + y)}\right)^n = 1.$$