IX PUNTSGEWIJZE EN UNIFORME CONVERGENTIE

In vorige hoofdstukken hebben we convergentie van getallenrijen bestudeerd. In de Analyse zijn echter rijen die functies als termen hebben van groot belang. Zulke functierijen hebben we eigenlijk al wel gezien:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x^j, \quad x \in (-1, 1).$$

Het is duidelijk wat in elk van deze gevallen de rij $f_0(x), f_1(x), \ldots$ is.

Convergentie van functierijen speelt onder andere een rol bij de vraag of de volgende identiteit geldt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

Met andere woorden kun je integraal en limiet omwisselen? Het volgend voorbeeld geeft aan dat dit niet altijd kan.

Voorbeeld Bekijk $\int_0^1 \frac{n^2 x}{(nx+1)^3}\, dx$. Voor elke $x \in [0, 1]$ geldt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 x}{(nx+1)^3} = 0$. Hierdoor vermoeden we dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^2 x}{(nx+1)^3}\, dx = 0.$$

We kunnen in dit geval ook ieder van de integralen $\int_0^1 \frac{n^2 x}{(nx+1)^3}\, dx$ uitrekenen met behulp van de technieken uit het vorige hoofdstuk. Merk op dat

$$\frac{n^2 x}{(nx+1)^3} = \frac{n(nx+1) - n}{(nx+1)^3} = \frac{n}{(nx+1)^2} - \frac{n}{(nx+1)^3}.$$

De functie $F_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $F_n(x) = -\frac{1}{nx+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(nx+1)^2}$ is een primitieve van $\frac{n^2 x}{(nx+1)^3}$, en er volgt

$$\int_0^1 \frac{n^2 x}{(nx+1)^3}\, dx = F_n(1) - F_n(0) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2}.$$

Hieruit zien we dat

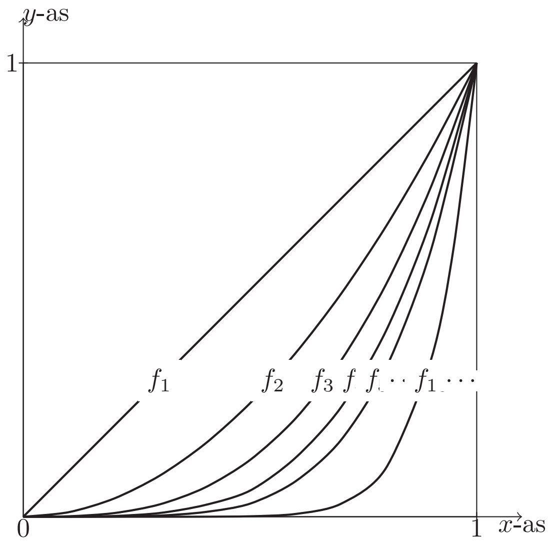
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^2 x}{(nx+1)^3}\, dx = \frac{1}{2}.$$

IX.1 Convergentie van rijen van functies

In deze paragraaf zullen we bekijken hoe we convergentie van een functierij kunnen definiëren.

Puntsgewijze convergentie

Laten we de rij $(f_n)_{n\geqslant 0}$ nemen, waarbij voor elke $n \in \mathbb{N}$ de functie f_n op het interval $(0,1)$ gedefinieerd is door $f_n(x) = x^n$, zie Figuur 9.1.



Figuur 9.1: Functierij $(f_n)_{n\geq 0}$ waarbij $f_n(x) = x^n$

Een methode om een limietfunctie te definiëren ligt voor de hand: voor elke $x \in (0,1)$ geldt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$; de limietfunctie van deze rij is dan de functie f gedefinieerd door $f(x) = 0$.

puntgewijze convergentie

IX.1.1 Definitie. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$ en, voor alle $n \in \mathbb{N}$, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$. We zeggen dat de functierij $(f_n)_{n\geq 0}$ *puntsgewijs convergeert* als voor elke $x \in D$ de reële rij $(f_n(x))_{n\geq 0}$ convergent is. De *limietfunctie* $f \colon D \to \mathbb{R}$ is dan gedefinieerd door

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Notatie: $f_n \xrightarrow{p} f$.

IX.1.2 Opmerking.

(i) Merk op dat de limietfunctie, indien zij bestaat, uniek is. Dit volgt direct uit de uniciteit van limieten van reele rijen.

(ii) Er geldt $f_n \xrightarrow{p} f$ dan en slechts dan als als voor iedere $x \in D$ en voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } n \geq N \text{ geldt } \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(iii) De functierij $(f_n)_{n\geq 0}$ is puntsgewijs convergent dan en slechts dan als voor elke $x \in D$, de reele rij $(f_n(x))_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij is.

IX.1.3 Voorbeeld. De functierij hierboven convergeert puntsgewijs op het interval $(0,1)$ naar de nulfunctie.

IX.1.4 Voorbeeld. Definieer nu, net als in Voorbeeld IX.1.3, de rij $(g_n)_{n\geq 0}$, $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, door $g_n(x) = x^n$. Er geldt (zie Stelling IV.1.8): $g_n \xrightarrow{p} g$ met

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in [0,1), \\ 1 & \text{als } x = 1. \end{cases}$$

Merk op dat de continuïteit verloren ging: hoewel elke g_n continu is, is g niet continu.

IX.1.5 Voorbeeld. We beschouwen de functierij uit de introductie van dit hoofdstuk. Zij $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f_n(x) = \frac{n^2 x}{(nx+1)^3}$ voor $n = 0, 1, \ldots$. Dan volgt uit de rekenregels voor limieten dat geldt $f_n \xrightarrow{p} 0$. Inderdaad, voor $x = 0$ geldt $f_n(x) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voor $x \in (0,1]$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{x}{(x+\frac{1}{n})^3} = 0 \cdot \frac{x}{x^3} = 0.$$

Uniforme convergentie

Puntsgewijze convergentie is een natuurlijk begrip maar blijkt in de praktijk niet zo goed te werken:

- In Voorbeeld IX.1.4 was elke g_n continu maar de limietfunctie was niet continu.
- In Voorbeeld IX.1.5 convergeert de functierij puntsgewijs naar nul, maar de reele rij $\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)_{n\geq 0}$ convergeert naar $\frac{1}{2}$ (zie introductie).

In de volgende definitie introduceren we een sterkere vorm van convergentie, die veel betere eigenschappen heeft, maar wel lastiger te controleren is.

uniforme convergentie

IX.1.6 Definitie. Zij $D \subseteq \mathbb{R}$ en laat voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$. Laat ook $f\colon D \to \mathbb{R}$. We zeggen dat de functierij $(f_n)_{n\geq 0}$ *uniform naar f convergeert* als voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } n \geq N \text{ en voor alle } x \in D \text{ geldt } \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Notatie: $f_n \xrightarrow{u} f$.

IX.1.7 Opmerking.

(i) Merk op dat in de bovenstaande definitie, het getal $N \in \mathbb{N}$ niet van $x \in D$ af mag hangen.

(ii) Er geldt $f_n \xrightarrow{u} f$ dan en slechts dan als (zie Opgave IX.1.3)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0.$$

(iii) Als $f_n \xrightarrow{u} f$ dan geldt ook $f_n \xrightarrow{p} f$ (zie Opgave IX.1.4).

IX.1.8 Voorbeeld. Beschouw de functierij $(g_n)_{n\geq 0}$ uit Voorbeeld IX.1.4. We zullen aantonen dat deze functierij *niet* uniform convergeert naar de functie g.

Neem $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Laat $N \in \mathbb{N}$. Neem nu $n = N$ en $x \in [0,1)$ met $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/N}$. Voor deze n en x hebben we

$$\left|g_n(x) - g(x)\right| \geq \varepsilon,$$

dus $(g_n)_{n\geq 0}$ convergeert niet uniform naar g.

Analoog kunnen we aantonen dat ook de $(f_n)_{n\geq 0}$ uit Voorbeeld IX.1.3 niet uniform naar f convergeert, zie Opgave IX.1.2.

IX.1.9 Voorbeeld. Door de definitieverzameling kleiner te nemen kan de convergentie uniform worden. Neem bijvoorbeeld $h_n\colon [0,1/2] \to [0,1]$ met $h_n(x) = x^n$ voor elke $x \in [0,1/2]$. Dan geldt $h_n \stackrel{u}{\to} h$ met $h(x) = 0$ voor elke $x \in [0,1/2]$. Immers, voor elke $\varepsilon > 0$ is er een N met $\varepsilon > (\frac{1}{2})^N$ en met zo een N hebben we:

$$\text{voor alle } x \in [0,1/2] \text{ en } n \geq N \text{ geldt } \big|h_n(x) - h(x)\big| < \varepsilon.$$

Continuïteit

Uniforme convergentie garandeert dat de limietfunctie van continue functies continu is.

IX.1.10 Stelling. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ een functie zijn. Laat $f\colon D \to \mathbb{R}$ een functie zijn. Als elke f_n continu is en $f_n \stackrel{u}{\to} f$ dan is ook f continu.

Bewijs. We moeten bewijzen dat f continu in c is voor elke $c \in D$. Laat $c \in D$.

Zij $\varepsilon > 0$. We zoeken een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$ geldt dat $\big|f(x) - f(c)\big| < \varepsilon$. Omdat $f_n \stackrel{u}{\to} f$ is er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$\text{voor alle } y \in D \text{ geldt } \big|f_N(y) - f(y)\big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Volgens de veronderstelling is de functie f_N continu in het punt $c \in D$; kies dus een $\delta > 0$ met $\big|f_N(x) - f_N(c)\big| < \varepsilon/3$ voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$. Er volgt dat voor elke $x \in D$ met $|x - c| < \delta$ geldt

$$\big|f(x)-f(c)\big| \leqslant \big|f(x)-f_N(x)\big|+\big|f_N(x)-f_N(c)\big|+\big|f_N(c)-f(c)\big| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dit bewijst de continuïteit van f. ■

Opgaven

1. Zij $D \subseteq \mathbb{R}$ en neem aan $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ en $g_n\colon D \to \mathbb{R}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Toon aan: als $f_n \stackrel{p}{\to} f$ en $g_n \stackrel{p}{\to} g$ dan

(a) $f_n + g_n \stackrel{p}{\to} f + g$;

(b) $\alpha f_n \stackrel{p}{\to} \alpha f$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $f_n g_n \stackrel{p}{\to} fg$.

2. Laat zien dat de functierij uit Voorbeeld IX.1.3 niet uniform naar f convergeert.

3. Bewijs Opmerking IX.1.7 (ii).

✍ **4.** Bewijs de uitspraak in Opmerking IX.1.7 (iii).

✍ **5.** Beschouw de functierij $(f_n)_{n\geqslant 0}$ met $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = x^n.$$

(a) Bewijs of weerleg: er is een $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \stackrel{p}{\to} f$.

(b) Bewijs of weerleg: er is een $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \stackrel{u}{\to} f$.

✍ **6.** Toon met behulp van de definitie aan dat de functierij uit Voorbeeld IX.1.5 niet uniform naar de nulfunctie convergeert.

✍ **7.** Beschouw de functierij $(f_n)_{n\geq 1}$ met $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f_n(x) = x/n$. Toon aan dat $f_n \xrightarrow{u} 0$.

✍ **8.** Beschouw de functierij $(f_n)_{n\geqslant 1}$ met $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = \cos(x/n).$$

(a) Bewijs of weerleg: er is een $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \xrightarrow{p} f$.

(b) Bewijs of weerleg: er is een $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \xrightarrow{u} f$.

✍ **9.** Beschouw de functierij $(f_n)_{n\geqslant 0}$ met $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$$

(a) Bewijs of weerleg: er is een $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \xrightarrow{p} f$.

(b) Bewijs of weerleg: er is een $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \xrightarrow{u} f$.

10. Laat $a \leq x_0 \leq b$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Bewijs het volgende: Als $(f_n)_{n\geq 0}$ uniform convergent is, dan geldt

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

11. Contrueer continue functies $f_0, f_1, \ldots, \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ zó dat de rij $(f_n)_{n\geq 0}$ puntsgewijs convergeert, maar

$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x).$$

✮**12.** Laat $a \leq x_0 \leq b$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie zijn. Neem aan dat $A_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ bestaat en dat $f_n \xrightarrow{u} f$ met $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Toon aan dat $(A_n)_{n\geq 0}$ een convergente rij is en dat[1]

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

✮**13.** Laat $D \subseteq \mathbb{R}$ en, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ en $g_n\colon D \to \mathbb{R}$. Toon aan: als $f_n \xrightarrow{u} f$ en $g_n \xrightarrow{u} g$ dan

(a) $f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g$;

(b) $\alpha f_n \xrightarrow{u} \alpha f$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) als alle f_n en g_n begrensd zijn dan geldt ook $f_n g_n \xrightarrow{u} fg$;

✍ (d) de voorwaarde in (c) betreffende begrensdheid kan niet gemist worden.

✮**14.** Bewijs dat de functierij $(f_n)_{n\geq 0}$ uniform convergent is dan en slechts dan als voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat

voor alle $m, n \geq N$ en voor alle $x \in D$ geldt $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

[1] Dit is een sterkere uitspraak dan in Opgave IX.1.10. Er is namelijk geen continuïteit van de f_n's geeist.