Uitwerkingen IX.1

Opgave IX.1.7
Beschouw de functierij $(f_n)_{n\geq 1}$ met $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f_n(x) = x/n$. Toon aan dat $f_n \xrightarrow{u} 0$.

Uitwerking:

Kladblok:

- We vermoeden dat f_n ook uniform naar de nulfunctie convergeert. We proberen $|f_n(x) - f(x)|$ af te schatten in iets wat niet meer van x afhangt:
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{n},$$
waarbij we gebruikten dat $|x| \leq 1$.

Zij $\varepsilon > 0$ vast. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Kies $x \in [-1,1]$ en $n \geq N$ willekeurig. Dan volgt:
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Opgave IX.I.4

Bewijs de uitspraak in Opmerking IX.1.7 (iii)

Uitwerking:

Laat $f : A \to \mathbb{R}$ en $f_n : A \to \mathbb{R}$ met $n \geq 1$ functies zijn. Neem aan dat $f_n \xrightarrow{u} f$. We bewijzen dat $f_n \xrightarrow{p} f$.

Kies $c \in A$ en $\varepsilon > 0$ willekeurig. Aangezien $f_n \xrightarrow{u} f$ kunnen we een $N \in \mathbb{N}$ vinden zó dat voor alle $n \geq N$ en voor alle $x \in A$ geldt dat
$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$
In het bijzonder zien we dat voor alle $n \geq N$ geldt $|f(c) - f_n(c)| < \varepsilon$. Aangezien $\varepsilon > 0$ willekeurig was, volgt dat $\lim_{n\to\infty} f_n(c) = f(c)$. Aangezien $c \in A$ willekeurig was, volgt dat $f_n \xrightarrow{p} f$.

Opgave IX.I.8
Beschouw de functierij $(f_n)_{n\geq 1}$ met $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door
$$f_n(x) = \cos(x/n).$$
(a) Bewijs of weerleg: er is een $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \to f$ puntsgewijs.
(b) Bewijs of weerleg: er is een $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \to f$ uniform.

Uitwerking:

(a) Zij $x \in \mathbb{R}$ vast. Beschouw de rij $(x/n)_{n\geq 1}$. Deze rij is convergent, omdat x volgens de rekenregels voor limieten buiten de limiet mag:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = x \cdot 0 = 0.$$

De cosinus is continu op $\mathbb{R}$, dus volgens Stelling V.I.5 geldt nu:

$$\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{x}{n}) = \cos(0) = 1.$$

Voor elke $x \in \mathbb{R}$ hebben we nu $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, dus de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = 1$ is de puntsgewijze limiet van de rij $(f_n)_{n\geq 1}$.

(b) Merk eerst het volgende op: als er een uniforme limiet bestaat, dan is deze limietfunctie gelijk aan de puntsgewijze limiet. Anders zou uit Opmering IX.1.7 (iii) volgen dat er twee verschillende puntsgewijze limieten zijn.

We gaan nu laten zien dat de functie f die we in onderdeel (a) gevonden hebben niet de uniforme limiet van de rij $(f_n)_{n\geq 1}$ kan zijn. Kies $\varepsilon = 1$. Kies $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ willekeurig. Neem $n = N$. Voor $x = n\pi$ geldt nu:

$$f_n(x) = \cos(x/n) = \cos(n\pi/n) = \cos(\pi) = -1.$$

Voor deze x geldt dus dat

$$|f_n(x) - f(x)| = |-1-1| = 2 \geq \varepsilon.$$

Dus de functie f_n convergeert niet uniform naar f.

Conclusie: f heeft geen uniforme limiet.