Uitwerkingen IX.2

Opgave IX.2.5
Bewijs met behulp van Gevolg IX.2.5 dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat
$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\Big)' = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

UITWERKING:

Zij $c \in \mathbb{R}$ willekeurig. Kies $R \in \mathbb{R}$ met $R > |c|$. Definieer voor elke $j \geq 0$ de functie $g_j : [-R, R] \to \mathbb{R}$ als $g_j(x) = x^j/j!$. Definieer $f_n : [-R, R] \to \mathbb{R}$ door $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} g_j(x)$. Bewering: $f_n \xrightarrow{p} f$ waarbij $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$ gegeven is door $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x)$. Om dit aan te tonen kiezen we $x \in [-R, R]$ willekeurig. Het voldoet nu aan te tonen dat de reeks $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ convergent is. Dit doen we met behulp van het quotientenkenmerk. Merk op:
$$\lim_{j\to\infty} \frac{|x^{j+1}/(j+1)!|}{|x^j/j!|} = \lim_{j\to\infty} \frac{|x|}{j+1} = 0,$$
dus het quotientenkenmerk geeft dat $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ de reeks absoluut convergent en dus ook convergent is.

Merk op dat voor elke $x \in [-R, R]$ geldt dat
$$f_n'(x) = \sum_{j=0}^{n} g_j'(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!}$$
Uit bovenstaande bewering zien we dat $f_n' \xrightarrow{p} h$ met $h : [-R, R] \to \mathbb{R}$ de functie[1] $h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$. Om de voorwaarden van Gevolg IX.2.5 te controleren (op $[-R, R]$)bewijzen we nu dat $f_n' \xrightarrow{u} h$. Merk op dat voor elke $x \in [-R, R]$ geldt dat (wegens Stelling VI.3.3)
$$|f_n'(x) - h(x)| = \Big|\sum_{j=n}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\Big| \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{R^j}{j!} \qquad (*)$$
Kies nu $\varepsilon > 0$ willkeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\sum_{j=N}^{\infty} \frac{R^j}{j!} < \varepsilon$. Er volgt uit $(*)$ dat voor alle $n \geq N$ en alle $x \in [-R, R]$ geldt
$$|f_n'(x) - h(x)| = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{R^j}{j!} \leq \sum_{j=N}^{\infty} \frac{R^j}{j!} < \varepsilon.$$
Conclusie $f_n' \xrightarrow{u} h$.

Het is nu duidelijk dat de voorwaarden van Gevolg IX.2.5 gelden, en dus kunnen we concluderen dat f differentieerbaar is op $(-R, R)$ en voor elke $x \in (-R, R)$ geldt
$$f'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j'(x) = h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$
In het bijzonder geldt dit dus voor $x = c$.

[1] Laat je niet in de war brengen dat dit 'toevallig' dezelfde functie als f is

Opgave IX.2.8

Zij $a, b \in \mathbb{R}$ en $a < b$. Zij $(f_n)_{n\geq 0}$ een functie rij met $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ zó dat

(1) Voor elke $n \geq 0$ geldt f_n is continu.
(2) $f_n \xrightarrow{p} 0$.
(3) Voor elke $x \in [a,b]$ geldt dat $(f_n(x))_{n\geq 0}$ een dalende rij is.

Laat zien dat $f_n \xrightarrow{u} 0$.
Uitwerking:

Neem aan dat (1), (2) en (3) gelden. Merk op dat uit (2) en (3) volgt dat voor elke $x \in [a,b]$ geldt dat $f_n(x) \geq 0$. Stel dat $(f_n)_{n\geq 0}$ niet uniform naar nul convergeert. We leiden een tegenspraak af.

Er volgt dat dat we een $\varepsilon > 0$ kunnen vinden zó dat voor elke $N \in \mathbb{N}$ er is een $n \geq N$ en er is een $x \in [a,b]$ met $|f_n(x) - 0| \geq \varepsilon$. Hieruit volgt dat we een rij $(x_n)_{n\geq 0}$ in $[a,b]$ kunnen vinden met $|f_n(x_n)| \geq \varepsilon$ voor elke $n \geq 0$. Aangezien $f_n(x_n) \geq 0$ volgt ook $f_n(x_n) \geq \varepsilon$.

Uit Bolzano-Weierstrass volgt dat de rij $(x_n)_{n\geq 0}$ een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ heeft. Noem $c = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Bewering: voor elke $m \geq 0$ geldt dat $f_m(c) > \varepsilon/2$. Kies $m \in \mathbb{N}$ willekeurig. Uit (1) volgt dat $\lim_{k\to\infty} f_m(x_{n_k}) = f_m(c)$. Dus we kunnen een N vinden zó dat voor alle $k \geq N$ geldt $|f_m(x_{n_k}) - f_m(c)| < \varepsilon/2$. Dus ook voor alle $k \geq N$ geldt

$$f_m(c) > f_m(x_{n_k}) - \varepsilon/2. \qquad (*)$$

Kies nu een $k \geq N$ zo groot dat $n_k \geq m$. Met (3) volgt dat $f_m(x_{n_k}) \geq f_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon$. Uit $(*)$ volgt nu dus dat $f_m(c) > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$. Dit bewijst de bewering.

De bewering geeft een tegenspraak, omdat uit (2) volgt dat $\lim_{m\to\infty} f_m(c) = 0$.