IX.2 Uniforme convergentie en integratie

Uniforme convergentie wordt onder andere gebruikt voor “het verwisselen van limiet en integraal”. Puntsgewijze convergentie is in het algemeen niet voldoende om limiet en integraal te verwisselen zoals blijkt uit het voorbeeld in de introductie van dit hoofdstuk. Een ander voorbeeld is te vinden in Opgave IX.2.1.

We bewijzen eerst een stelling over het verwisselen van limiet en integraal.

IX.2.1 Stelling. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn. Laat $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn.[2] Als $f_n \xrightarrow{u} f$ dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_a^b f_n(x)\,dx \Big).$$

Bewijs. Merk eerst op dat uit de eigenschappen van de integraal volgt dat

$$\Big| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \Big| = \Big| \int_a^b f_n(x) - f(x)\,dx \Big| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx.$$

We bewijzen nu de convergentie. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \ge N$ en voor alle $x \in [a, b]$ geldt dat $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/(b - a)$. Uit de bovenstaande afschatting en eigenschappen van de integraal volgt dat voor alle $n \ge N$ geldt dat

$$\Big| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \Big| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le \int_a^b \varepsilon/(b - a)\,dx = \varepsilon.$$

Uit bovenstaande kunnen we concluderen dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

∎

Als gevolg hiervan geldt het volgende resultaat voor reeksen.

termsgewijs integreren

IX.2.2 Gevolg. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $g_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn. Laat $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn. Definieer voor elke $n \ge 0$ de functie $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ door $f_n = \sum_{j=0}^{n} g_j(x)$. Als $f_n \xrightarrow{u} f$, dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^b g_j(x)\,dx.$$

Bewijs. Dit volgt uit Stelling IX.2.1 en

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} \int_a^b g_j(x)\,dx.$$

∎

IX.2.3 Voorbeeld. Zij $0 < r < 1$. Beschouw $g_j : [-r, r] \to \mathbb{R}$ gegeven door $g_j(x) = x^j$. Dan geldt $|g_j(x)| \le r^j$. Aangezien $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$ convergent is, volgt uit

[2]Dat f integreerbaar is volgt ook uit de aanname dat $(f_n)_{n\ge 0}$ uniform naar f convergeert, en zouden we dus kunnen weglaten uit de aannames (zie Opgave IX.2.7).

Opgave IX.2.3 dat de functierij $\left(\sum_{j=0}^{n} g_j\right)_{n\geq 0}$ uniform convergent. De puntsgewijze limiet is de functie $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Zij $t \in [-r, r]$. Uit Gevolg IX.2.2 zien we dat

$$\int_0^t \frac{1}{1-x}\, dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t x^j\, dx.$$

Stelling VIII.3.4 geeft dus dat

$$-\ln(1-t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j+1}}{j+1}.$$

Aangezien $r \in (0, 1)$ en $t \in [-r, r]$ willekeurig zijn, volgt dat de laatste identiteit geldt voor alle $t \in (-1, 1)$. ■

Limiet en differentiatie

Als tweede toepassing van Stelling IX.2.1 kunnen we het volgende resultaat bewijzen.

IX.2.4 Stelling. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $c \in [a, b]$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie op $[a, b]$ zijn[3] zó dat f_n' continu is op $[a, b]$. Laat ook $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie op $[a, b]$ zijn. Als $(f_n')_{n\geq 0}$ uniform convergent is en $f_n \xrightarrow{p} f$, dan geldt dat f differentieerbaar is op $[a, b]$ en voor alle $x \in [a, b]$

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Bewijs. Zij $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zó dat $f_n' \xrightarrow{u} g$. Merk op dat g continu is wegens Stelling IX.1.10. Zij $x \in [a, b]$. Zij $n \in \mathbb{N}$. Uit Stelling VIII.3.4 volgt dat

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)\, dt.$$

Nu geeft Stelling IX.2.4 dat

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\, dt.$$

De Hoofdstelling van de Integraalrekening impliceert dat f differentieerbaar is op $[a, b]$ en $f'(x) = g(x)$ voor alle $x \in [a, b]$. ■

termsgewijs differentiëren

IX.2.5 Gevolg. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $g_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie zijn op $[a, b]$ zó dat g_n' continu is op $[a, b]$. Definieer voor elke $n \geq 0$ de functie $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ door $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} g_j(x)$. Laat ook $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie op $[a, b]$ zijn. Als $(f_n')_{n\geq 0}$ uniform convergent is en $f_n \xrightarrow{p} f$, dan geldt dat f differentieerbaar is op $[a, b]$ en voor elke $x \in [a, b]$ geldt

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j'(x).$$

Bewijs. Dit volgt uit Stelling IX.2.4 en $f_n' = \sum_{j=0}^{n} g_j'$. ■

IX.2.6 Opmerking. Zij $a < b$. Laat voor elke $n \geq 0$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie zijn en laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie zijn. Als $f_n \xrightarrow{u} f$, dan kun je hieruit niet concluderen dat $f_n' \xrightarrow{p} f'$. Een eenvoudig tegenvoorbeeld wordt gegeven in Opgave IX.2.4.

[3]Hierbij nemen we de linker- en rechter afgeleide in de randpunten

Opgaven

1. Beschouw de functierij $(f_n)_{n\geqslant 0}$ met $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = 2nx^n(1-x^n).$$

Laat zien dat $f_n \xrightarrow{p} 0$ en $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.

2. Bewijs dat onder de aannames van Stelling IX.2.4 geldt dat $f_n \xrightarrow{u} f$.

Weierstrass M-test **3.** Zij $D \subseteq \mathbb{R}$. Laat voor elke $j \geq 0$, $g_j : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn en neem aan dat er een constante $M_j \geq 0$ is zó dat voor alle $x \in D$ geldt dat $|g_j(x)| \leq M_j$. Bewijs de volgende uitspraak: als $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ convergent is, dan is de functierij $\left(\sum_{j=0}^{n} g_j\right)_{n\geq 0}$ uniform convergent.

4. Definieer voor elke $n \geq 1$, $f_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n}$.

(a) Laat zien dat $f_n \xrightarrow{u} 0$.

(b) Laat zien dat de functierij $(f_n')_{n\geq 1}$ niet puntsgewijs convergent is.

Hint: maak gebruik van de bekende eigenschappen van sin en cos.

5. Bewijs met behulp van Gevolg IX.2.5 dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\Big)' = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

6. Bewijs met behulp van Gevolg IX.2.5 dat voor alle $x \in (-1,1)$ geldt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} jx^{j-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

☆ **7.** Laat voor elke $n \geq 0$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn. Neem aan dat er een functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is zó dat $f_n \xrightarrow{u} f$. Toon aan dat f integreerbaar is.

☆ **8.** Zij $a, b \in \mathbb{R}$. Zij $(f_n)_{n\geq 0}$ een functie rij met $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ zó dat

Dini's Stelling

(i) Voor elke $n \geq 0$ geldt f_n is continu.

(ii) $f_n \xrightarrow{p} 0$.

(iii) Voor elke $x \in [a,b]$ geldt dat $(f_n(x))_{n\geq 0}$ een dalende rij is.

Bewijs dat $f_n \xrightarrow{u} 0$.

Hint: Stel niet. Leid met behulp van de Stelling van Bolzano–Weierstrass een tegenspraak af.