ANTWOORDEN OEFENTENTAMEN 2011

Opgave 1a. Kies $x, y \in A$ en neem aan dat $h(x) = h(y)$. Te bewijzen: $x = y$.

Wegens de definitie van h volgt $g(f(x)) = g(f(y))$. Uit de injectiviteit van g volgt dat $f(x) = f(y)$. Uit de injectiviteit van f volgt $x = y$.

Opgave 1b. Kies $c \in C$ willeurig. Te bewijzen: er bestaat een $a \in A$ zó dat $h(a) = c$.

Wegens de sujectiviteit van g kunnen we een $b \in A$ vinden zó dat $g(b) = c$. Vervolgens gebruiken we de surjectiviteit van f om een $a \in A$ te vinden zó dat $f(a) = b$. Er volgt dat $h(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.

Opgave 2. Zie dictaat.

Opgave 3a. $\sim$ is reflexief. Zij $a \in \mathbb{Z}$ willekeurig. Te bewijzen $a \sim a$.

Dit is waar, want $a \cdot 1 = a$.

Opgave 3b. $\sim$ is niet symmetrisch. Een tegenvoorbeeld is: $1 \sim 2$, want $1 \cdot 2 = 2$. Echter niet geldt $2 \sim 1$, want $2x = 1$ heeft geen oplossing in $\mathbb{Z}$.

Inderdaad[1] voor alle $x \leq 0$ geldt $2x \leq 0$. Dus $2x \neq 1$. Als $x \geq 1$ dan geldt $2x \geq 2$ dus ook in dit geval $2x \neq 1$.

Opgave 3c. $\sim$ is transitief. Kies $a, b, c \in \mathbb{Z}$ zó dat $a \sim b$ en $b \sim c$. Te bewijzen $a \sim c$.

Uit $a \sim b$ en $b \sim c$ volgt dat er $x, y \in \mathbb{Z}$ zijn zó dat $ax = b$ en $by = c$. Er volgt $a(xy) = (ax)y = by = c$. Dus $a \sim c$.

Opgave 4. Zie dictaat.

Opgave 5. De ongelijkheid van Bernouilli zegt dat voor alle $b > -1$ en $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt dat

$$1 + nb \leq (1 + b)^n.$$

Definieer $x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$. Kies $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ willekeurig en pas de ongelijkheid van Bernouilli toe met $b = -1/n^2$. Dit geeft $1 - \frac{1}{n} \leq x_n$. Aan de andere kant geldt $x_n \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Aangezien $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$, volgt uit de insluitstelling dat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Opgave 6a. Zie dictaat.

Opgave 6b. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem $\delta = \epsilon$. Kies $x, y \in \mathbb{R}$ met $|x - y| < \delta$ willekeurig. Er volgt

$$\begin{aligned} \Big||x-2| - |y-2|\Big| &\leq \Big|x - 2 - (y-2)\Big| \qquad \text{(Omgekeerde driehoeksongelijkheid)} \\ &= |x - y| < \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Opgave 7a. Zie dictaat.

[1] Dit stukje mag worden weggelaten, en kan ook op andere manieren worden bewezen

Opgave 7b. We gaan eerst na voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} x^k$ absoluut convergent is. Laat $a_k = \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{k}} x^k\right| = \frac{1}{\sqrt{k}}|x|^k$. We onderzoeken de convergentie van $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Er geldt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}|x| = |x|.$$

Uit het quotientenkenmerk volgt dat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergent is als $|x| > 1$, en divergent is als $|x| < 1$. Merk op[2] dat het quotientenkenmerk zelfs geeft dat voor $|x| > 1$ *niet* geldt dat $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ $(*)$. Dat zullen we verderop gebruiken.

Als $x = 1$ of $x = -1$, dan geldt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Het is bekend dat dit een divergente reeks is want hij is van het type $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ met $p = \frac{1}{2} < 1$.

Conclusie: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} x^k$ is absoluut convergent dan en slechts dan als $-1 < x < 1$.

We onderzoeken nu voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} x^k$ convergent is. Aangezien elke absoluut convergente reeks ook convergent is, geldt dat de reeks convergent is voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < 1$. Voor $|x| > 1$ geldt dat *niet* $\lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} x^k = 0$. Dit volgt uit $(*)$. Dus uit Stelling VI.1.7 volgt dat $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} x^k$ divergent is voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| > 1$.

Er resteert om te onderzoeken of de reeks convergent is voor $x = 1$ en $x = -1$. Als $x = -1$, dan geldt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

en we hebben al opgemerkt dat dit divergent is. Als $x = 1$, dan geldt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

Deze reeks voldoet aan de eisen van de stelling van Leibniz: $(1/\sqrt{k})_{k\geq 1}$ is een rij met positieve elementen, de rij is dalend, en convergeert naar nul. Dus de reeks is convergent voor $x = 1$.

Conclusie: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} x^k$ is absoluut convergent dan en slechts dan als $-1 < x \leq 1$.

Opgave 8.

8a We zeggen dat de functierij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniform naar f convergeert als voor elke $\varepsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat voor alle $n \geq N$ voor alle $x \in A$ geldt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

8b Er geldt: $f_n(0) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Als $x \neq 0$ dan geldt

$$0 \leq |f_n(x)| = \frac{n|x|}{1 + n^2x^2} \leq \frac{n|x|}{n^2x^2} = \frac{1}{n|x|} \qquad (*)$$

Hieruit kun je met behulp van de insluitsstelling zien dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Het kan ook direct met de definitie van convergentie van rijen. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > \frac{1}{\varepsilon|x|}$. Er volgt met (*) dat voor alle $n \geq N$ geldt:

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{N|x|} < \varepsilon.$$

Conclusie $f_n \xrightarrow{p} f$ waarbij f de nulfunctie is.

8c Dit is niet waar. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel er is een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \xrightarrow{u} f$. Dan volgt uit een stelling dat $f_n \xrightarrow{p} f$. Uit de uniciteit van limieten van rijen volgt dat f de functie uit 8b moet zijn. Bewering: f_n convergeert niet uniform naar de nulfunctie. Inderdaad, neem $\varepsilon = 1/2$. Neem $N \in \mathbb{N}$ willekeurig. Kies $x = 1/n$, dan volgt

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+1} = 1/2 \geq \varepsilon.$$

Conclusie er is geen functie f waarvoor geldt dat $f_n \xrightarrow{u} f$.

[2]Dit staat helaas niet zo duidelijk in het dictaat