UITWERKING TOETS WISKUNDIGE STRUCTUREN 8-11-2011

1a. Zij $y \in f[C \cap D]$. Kies $v \in C \cap D$ zó dat $f(v) = y$. Aangezien $v \in C$ dus ook $y = f(v) \in f[C]$. Op dezelfde manier zien we dat $y = f(v) \in f[D]$. Er volgt $y \in f[C] \cap f[D]$.

1b. Zie dictaat.

1c. Wegens 1a voldoet het $f[C] \cap f[D] \subseteq f[C \cap D]$ te bewijzen. Zij $y \in f[C] \cap f[D]$. Dan geldt $y \in f[C]$ en $y \in f[D]$. Dus er is een $v_1 \in C$ zó dat $y = f(v_1)$. Ook geldt er is een $v_2 \in V$ zó dat $y = f(v_2)$. Er volgt $f(v_1) = y = f(v_2)$. Uit de injectiviteit van f volgt dat $v_1 = v_2$. Dus geldt $v_1 \in C \cap D$. Dus $y = f(v_1) \in f[C \cap D]$.

2. Zij $x > -1$ willekeurig. We bewijzen met inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $\frac{1}{(1+x)^n} \geq 1 - nx$.

Stap 1. Voor $n = 0$ geldt $\frac{1}{(1+x)^0} = 1$ en $1 - 0x = 1$. Dus de ongelijkheid is waar voor $n = 0$.

Stap 2. Laat $n \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $\frac{1}{(1+x)^n} \geq 1 - nx$ (inductieveronderstelling). We tonen aan dat

$$\frac{1}{(1+x)^{n+1}} \geq 1 - (n+1)x.$$

Uit de inductieveronderstelling en $\frac{1}{1+x} > 0$ volgt dat

$$\frac{1}{(1+x)^{n+1}} = \frac{1}{(1+x)^n}\frac{1}{1+x} \geq (1-nx)\frac{1}{1+x}.$$

Het voldoet dus te bewijzen dat

$$(1-nx)\frac{1}{1+x} \geq 1 - (n+1)x$$

Aangezien $\frac{1}{1+x} > 0$ is het equivalent om te laten zien dat

$$1 - nx \geq \big(1 - (n+1)x\big)(1+x) \quad (*)$$

Er geldt

$$\big(1-(n+1)x\big)(1+x) = 1 - (n+1)x + x - (n+1)x^2 = 1 - nx - (n+1)x^2 \leq 1 - nx.$$

Dus $(*)$ geldt inderdaad.

Uit Stappen 1 en 2 en het principe van volledige inductie volgt nu het gevraagde.

3. Zie dictaat.

4. (a) $\sup V = 2$, (b) $\inf V = 1$, (c) $\max V = 2$, (d) $\min V$ bestaat niet.

We bewijzen eerst (a) en (c). Zij $x \in \mathbb{R}$ met $x \geq 0$. Er geldt $x + 1 \geq 1 > 0$, dus $\frac{1}{x+1} \leq 1$. Er volgt $1 + \frac{1}{1+x} \leq 2$. Dus 2 is een bovengrens voor V. Als $x = 0$, dan geldt $2 = 1 + \frac{1}{1+0}$. Dus $2 \in V$. Hieruit zien we dat $\max V = 2$, en dus ook $\sup V = 2$.

We bewijzen (b) en (d). Zij $x \in \mathbb{R}$ met $x \geq 0$. Er geldt $x + 1 > 0$. Dus $\frac{1}{x+1} > 0$. Dus $1 + \frac{1}{1+x} > 1$. Hieruit volgt dat 1 een ondergrens voor V is. We bewering dat 1 de grootste ondergrens is voor V. Neem aan dat $v \in \mathbb{R}$ een ondergrens voor V is. We laten zien dat $v \leq 1$. Stel niet. Dan volgt $v > 1$. Definieer $\varepsilon = v - 1$. Dan geldt $\varepsilon > 0$. Kies $x \geq 0$ zó groot dat $\frac{1}{1+x} < \varepsilon$. Er volgt dat $v = 1 + \varepsilon > 1 + \frac{1}{1+x}$. Aangezien $1 + \frac{1}{1+x} \in V$ is v geen ondergrens voor V. Tegenspraak. Dus $v \leq 1$. Dit laat zien $1 = \inf V$.

Om te laten zien dat $\min V$ niet bestaat voldoet het om te laten zien dat $1 \notin V$. Dit volgt uit $1 + \frac{1}{1+x} > 1$ voor alle $x \geq 0$.

5ab. Zie dictaat IV.2.

5c. Dit is niet waar. Het volgende is een tegenvoorbeeld. Neem $x_n = 0$ en $y_n = \frac{1}{n}$ voor $n \geq 0$. Dan geldt $x_n < y_n$ voor alle $n \geq 0$. Verder geldt $x = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ en $y = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Maar er geldt niet $x < y$.