V CONTINUÏTEIT

In dit hoofdstuk bestuderen we continue reëelwaardige functies op deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. We leiden een aantal belangrijke eigenschappen af en laten zien dat elke continue functie op een gesloten en begrensd interval uniform continu is.

V.1 Continue functies

We beginnen met de definitie van continuïteit. Erg informeel gezegd betekent continuïteit zoiets als: kleine oorzaken hebben kleine gevolgen. Deze betekenis geeft dan ook meteen het maatschappelijk nut aan van dit begrip, waar men bang is voor kleine oorzaken met grote gevolgen. Nu de formele definitie.

V.1.1 Definitie. Zij $D \subseteq \mathbb{R}$, en $f\colon D \to \mathbb{R}$. Laat $c \in D$.

(i) We noemen f *continu in het punt* c als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } x \in D \text{ met } |x - c| < \delta: \quad \big|f(x) - f(c)\big| < \varepsilon.$$

We noemen $f\colon D \to \mathbb{R}$ *continu* als f continu is in ieder punt van D.

(ii) We zeggen dat f *linkscontinu in het punt* c is indien er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } x \in D \text{ met } c - \delta < x \leqslant c: \quad \big|f(x) - f(c)\big| < \varepsilon.$$

(iii) We zeggen dat f *rechtscontinu in het punt* c is indien er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } x \in D \text{ met } c \leqslant x < c + \delta: \quad \big|f(x) - f(c)\big| < \varepsilon.$$

(iv) Als f niet continu is in het punt c dan noemen we $f : D \to \mathbb{R}$ *discontinu in het punt* c.

V.1.2 Opmerking. Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ is continu in c dan en slechts dan als f links- en rechtcontinu is in c. Zie Opgave V.1.8.

V.1.3 Opmerking. Zij $c \in E \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$. Als $f : D \to \mathbb{R}$ continu is in c, dan is de functie $g : E \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = f(x)$ ook continu in c.

V.1.4 Voorbeeld. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = |x|$ is continu in elke $c \in \mathbb{R}$. We zoeken voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zó dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ met $|x - c| < \delta$ geldt $\big||x| - |c|\big| < \varepsilon$. We gaan hiervoor de omgekeerde driehoeksongelijkheid $\big||x| - |c|\big| \leqslant |x - c|$ gebruiken (zie Gevolg III.2.12).

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta = \varepsilon$. Neem aan dat $x, c \in \mathbb{R}$ en $|x - c| < \delta$. Er volgt

$$|f(x) - f(c)| = \big||x| - |c|\big| \leqslant |x - c| < \varepsilon.$$

Dus f is continu. ▬

V.1.5 Voorbeeld. De functie $f\colon (-1, 0) \cup (0, 1) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0) \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

is continu, want het volgt onmiddellijk uit de definitie dat f continu is in ieder punt van $(-1, 0)$ en $(0, 1)$.

Daarentegen is de functie $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

niet continu, want f is niet continu in het punt 0. Inderdaad, neem bijvoorbeeld $\varepsilon = 1/2$. Kies $\delta > 0$ willekeurig. Neem $x = \delta/2$. Dan geldt $|x - 0| = |x| < \delta$ en

$$\big|f(x) - f(0)\big| = |f(x)| = 1 \geqslant \frac{1}{2}.$$

▬

De volgende stelling geeft het verband tussen continuïteit en limieten van rijen.

V.1.6 Stelling. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$ en $c \in D$ gegeven zijn. Voor een functie $f\colon D \to \mathbb{R}$ zijn de volgende twee uitspraken equivalent:

(i) f is continu in het punt c;

(ii) voor iedere rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ in D met $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ geldt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Bewijs. (i) $\Rightarrow$ (ii): Neem aan dat f continu is in c, en zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een rij in D met $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Zij $\varepsilon > 0$. Omdat f continu is in c is er een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$ geldt dat $\big|f(x) - f(c)\big| < \varepsilon$. Wegens $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ is er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $n \geqslant N$ geldt dat $|x_n - c| < \delta$. Hieruit volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt $\big|f(x_n) - f(c)\big| < \varepsilon$. Dit laat zien dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Neem eens aan dat f niet continu is in c. Dan is er een $\varepsilon > 0$ met de volgende eigenschap: voor iedere $n \geq 0$ bestaat een punt $x_n \in D$, met de eigenschap $|x_n - c| < 1/(n+1)$ en $\big|f(x_n) - f(c)\big| \geqslant \varepsilon$. De resulterende rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ ligt in D en voldoet aan $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, maar de rij $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ convergeert niet naar $f(c)$. ■

Met behulp van deze stelling kunnen we uit de rekenregels voor limieten van rijen overeenkomstige rekenregels voor continue functies afleiden (vergelijk Stelling IV.2.1).

Rekenregels voor continuïteit

V.1.7 Stelling. Zij $D \subseteq \mathbb{R}$. Als $f\colon D \to \mathbb{R}$ en $g\colon D \to \mathbb{R}$ twee functies zijn die continu zijn in het punt $c \in D$, en $\alpha \in \mathbb{R}$ is een reëel getal, dan geldt

(i) αf is continu in c.

(ii) $f + g$ is continu in c.
(iii) fg is continu in c.
(iv) Als $f(x) \neq 0$ voor alle $x \in D$, dan is $1/f$, $x \mapsto 1/f(x)$ continu in c.
(v) $|f|$ is continu in c.

Bewijs. Zie Opgave V.1.9. ∎

V.1.8 Voorbeeld. De functie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ is continu op $\mathbb{R}$ (neem $\delta = \varepsilon$ in de definitie van continuïteit). Uit (iii) volgt dan dat, voor iedere gehele $k \geqslant 1$, de functie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^k = x \cdot \cdots \cdot x$ (k maal) continu is op $\mathbb{R}$.

V.1.9 Stelling. Laat D en E twee deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn, en laat $f: D \to \mathbb{R}$ en $g: E \to \mathbb{R}$ twee functies zijn, met $f[D] \subseteq E$. Laat $c \in D$. Als f continu is in c, en g continu is in $f(c)$, dan is de functie[1] $h : D \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $h(x) = g(f(x))$, continu in c.

Bewijs. Zij $(x_n)_{n \geqslant 0}$ een rij met $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Dan volgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$ omdat f continu is in c, en omdat g continu is in $f(c)$ volgt dan meteen dat

$$\lim_{n\to\infty} \big(g \circ f\big)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g\big(f(x_n)\big) = g\big(f(c)\big).$$

∎

Opgaven

1. Bewijs aan de hand van de definitie van continuïteit dat de functie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^2$ continu is:

(a) in het punt 0;

(b) in het punt -1;

✍ (c) op $\mathbb{R}$.

2. Toon aan dat de functie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{1 + x^2}$$

continu is. Gebruik de ‘rekenregels’ voor continuïteit.

✍ **3.** Is de functie $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = 1/x$$

continu?

4. Laat $a_0, a_1, \ldots, a_k$ reële getallen zijn. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k.$$

Gebruik de rekenregels voor continuïteit om aan te tonen dat f continu is.

5. Laat $a_0, a_1, \dots, a_k$ reële getallen zijn. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k.$$

(a) Toon met behulp van de definitie aan dat f continu in 0 is.

☆ (b) Toon met behulp van de definitie aan dat f continu.

6. Bewijs met behulp van de definitie van de continuïteit dat de functie $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$ continu is.

✍ **7.** Zij $D \subseteq \mathbb{R}$ en $c \in D$, en laat $f : D \to \mathbb{R}$ functie zijn die continu is in c. Bewijs of weerleg;

(a) Als $f(c) > 0$, dan bestaat er een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$ geldt dat $f(x) \geq 0$

(b) Als $f(c) \geq 0$, dan bestaat er een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$ geldt dat $f(x) \geq 0$

8. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Laat $c \in (a,b)$.
Bewijs: f is continu in c dan en slechts dan als f rechts- en linkscontinu in c is.

✍ **9.** Bewijs Stelling V.1.7.

✍ **10.** Zij $D \subseteq \mathbb{R}$. Een functie $f\colon D \to \mathbb{R}$ heet *Lipschitz continu* als er een $K \geq 0$ bestaat zó dat voor alle $x, y \in D$ geldt

$$\bigl|f(x) - f(y)\bigr| \leq K|x - y|.$$

Bewijs: een Lipschitz continue functie $f\colon D \to \mathbb{R}$ is continu.

11. Geef een voorbeeld van een $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ die continu is, maar niet Lipschitz continu.

12. Definieer $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bewijs dat f in geen $x \in \mathbb{R}$ continu is.

☆ **13.** Definieer $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2, & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Bewijs dat f continu in 0 is

(b) Bewijs dat f in geen enkel ander punt continu is.

[1] We noteren h vaak als $g \circ f$. Strikt genomen kunnen we g en f niet samenstellen, want $f\colon D \to \mathbb{R}$, en $g\colon E \to \mathbb{R}$, dus het domein van g is niet het codomein van f. Maar het beeld van f is bevat in E, dus voor iedere x in D is $g(f(x))$ goed gedefinieerd.