Uitwerking V.1

Opgave V.1.1a
Bewijs aan de hand van de definitie van continuïteit dat de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^2$ continu is in het punt 0.

UITWERKING:
Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Zij $x \in \mathbb{R}$ willekeurig. Als $|x - 0| = |x| < \delta$ dan geldt

$$\big|f(x) - f(0)\big| = \big|x^2 - 0^2\big| = |x|^2 < \delta^2 = \big(\sqrt{\varepsilon}\big)^2 = \varepsilon.$$

Opgave V.1.1c
Bewijs aan de hand van de definitie van continuïteit dat de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^2$ continu is op $\mathbb{R}$.

UITWERKING:
We bewijzen dat f continu is in elke $c > 0$; als $c < 0$ is het bewijs analoog en het geval $c = 0$ wordt in onderdeel (a) aangetoond.
Zij $\varepsilon > 0$, we zoeken een $\delta > 0$ zó dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ met $|x - c| < \delta$ geldt $|x^2 - c^2| < \varepsilon$.

Merk eerst op: als $0 < x < 2c$ dan

$$|x^2 - c^2| = |x + c| \cdot |x - c| = (x + c) \cdot |x - c| < 3c \cdot |x - c|,$$

en

$$3c \cdot |x - c| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x - c| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

Kies $\delta = \min\{c, \varepsilon/3c\}$, we moeten nu laten zien dat de zo gekozen δ werkt.
Zij $x \in \mathbb{R}$ met $|x - c| < \delta$. Omdat $\delta \leq c$ geldt er $0 < x < 2c$, en dus

$$|x^2 - c^2| < 3c \cdot |x - c| < 3c \cdot \delta \leq 3c \cdot \frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon.$$

Opgave V.1.6
Twee hints: Bewijs eerst de continuïteit in 0. Als je opgave 1a begrijpt, dan lukt dat hier ook. Gemener is om de continuïteit in c met $c > 0$ te bewijzen. Het is handig om de volgende wortel-truc te gebruiken:

$$\sqrt{x} - \sqrt{c} = (\sqrt{x} - \sqrt{c})\frac{\sqrt{x} + \sqrt{c}}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} = \frac{(x - c)}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}.$$

Opgave V.1.9
We bewijzen deel (iii) van stelling V.1.5. De andere gevallen kun je zelf proberen. Neem aan dat $f : D \to \mathbb{R}$ en $g : D \to \mathbb{R}$ continu in het punt c zijn.

We tonen aan dat de product functie $h : D \to \mathbb{R}$ gegeven door $h(x) = f(x)g(x)$, continu in het punt c is. Hiervoor gebruiken we stelling V.1.4. Kies een willekeurige rij $(x_n)_{n\geq 0}$ in D met de eigenschap dat $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Wegens Stelling V.1.4 is het voldoende om aan te tonen dat $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(c)$. Merk op dat uit Stelling V.1.4 toegepast op f en g volgt dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$ en $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(c)$. Uit Stelling IV.2.7 volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} \big(f(x_n)g(x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(c)g(c) = h(c).$$

Dit bewijst het gevraagde.

Opgave V.1.10
Een functie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heet *Lipschitz continu* als er een $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bestaat zó dat

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq K|x - y|$$

voor alle $x, y \in [a, b]$.
Bewijs: een Lipschitz continue functie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ is continu.
UITWERKING:
Zij $c \in [a, b]$ willekeurig; we bewijzen dat f continu in c is. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta = \varepsilon/(K+1)$; omdat $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ is $K + 1 > 0$ en dus $\delta > 0$. Zij $x \in [a, b]$ willekeurig. Als $|x - c| < \delta$ dan geldt

$$\big|f(x) - f(c)\big| \leq K|x - c| < K\delta = K\frac{\varepsilon}{K+1} < \varepsilon.$$