V.2 Limieten van functies

Beschouw een deelverzameling $D \subseteq \mathbb{R}$, een functie $f\colon D \to \mathbb{R}$ en zij $c \in \mathbb{R}$. We willen het gedrag van f in de buurt van c bestuderen. De functiewaarde in c is daarvoor niet belangrijk, de functie hoeft in c zelfs niet gedefinieerd te zijn (want c hoeft geen element van D te zijn). Wat wel nodig is, is de mogelijkheid het punt c met behulp van punten uit D willekeurig nauwkeurig te kunnen benaderen. Dit leidt tot de volgende definitie.

V.2.1 Definitie. Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}$ en zij $c \in \mathbb{R}$. We noemen c een *verdichtingspunt*[2] van D als er voor iedere $\delta > 0$ een $x \in D \setminus \{c\}$ bestaat met $|x - c| < \delta$.

Intuïtief betekent dit dat we willekeurig "dicht" bij c kunnen komen binnen de verzameling $D \setminus \{c\}$.

We zijn voornamelijk geïnteresseerd in de volgende situaties.

V.2.2 Voorbeeld. Laat a, b en c reële getallen zijn.

(i) Als $a < b$ en $a \leqslant c \leqslant b$, dan is c verdichtingspunt van de intervallen (a, b) en $[a, b]$.

(ii) Als $a < c < b$, dan is c een verdichtingspunt van het *gepuncteerde* interval $(a, b) \setminus \{c\}$.

V.2.3 Definitie. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$, en $f\colon D \to \mathbb{R}$ een functie zijn en zij $c \in \mathbb{R}$.

(i) Neem aan dat c een verdichtingspunt van D is. We noemen een reëel getal L de *limiet van f in c* indien er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } x \in D \text{ met } 0 < |x - c| < \delta : \quad \big|f(x) - L\big| < \varepsilon.$$

We noteren dan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

(ii) Neem aan dat c een verdichtingspunt is van $\{x \in D : x < c\}$. De *linkerlimiet*[3] wordt gedefinieerd door in het bovenstaande alleen $x \in D$ met $c - \delta < x < c$ te beschouwen. Notatie: $\lim\limits_{x \uparrow c} f(x) = L$.

(iii) Neem aan dat c een verdichtingspunt is van $\{x \in D : x > c\}$. De rechterlimiet wordt gedefinieerd door in het bovenstaande alleen $x \in D$ met $c < x < c + \delta$ te beschouwen. Notatie: $\lim\limits_{x \downarrow c} f(x) = L$.

V.2.4 Opmerking. (i) Merk op: als c een verdichtingspunt van D is, bevat $D \setminus \{c\}$ voor iedere $\delta > 0$ inderdaad punten waarvoor $|x - c| < \delta$. De limiet is dan uniek en we kunnen spreken van *de* limiet. Een soortgelijk argument laat zien dat ook linker en rechter limieten uniek zijn. Let wel: net als bij rijen hoeft een functie niet zulke limieten te hebben. Zie Voorbeeld V.2.7.

(ii) In de definitie van limiet mag $x \in D$ niet gelijk aan c genomen worden. Dit is uitgesloten doordat we eisen $0 < |x - c|$.

[2]Let wel: c hoeft niet zelf in D te liggen. En ook als $c \in D$ dan hoeft c nog geen verdichtingspunt van D te zijn.

[3]Dit betekent: limiet vanaf de linkerkant van c.

(iii) Een onmiddellijk gevolg van de definitie is de volgende karakterisering van continuïteit in termen van limieten: als $c \in D$ een verdichtingspunt is van D, dan is een functie $f\colon D \to \mathbb{R}$ is continu in c dan en slechts dan als $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (zie Opgave V.2.1).

De volgende stelling geeft het verband tussen limieten van functies en limieten van rijen.

V.2.5 Stelling. Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}$, zij $f\colon D \to \mathbb{R}$ een functie, en zij $c \in \mathbb{R}$ een verdichtingspunt van D. Voor een reëel getal L zijn de volgende twee uitspraken equivalent:

(i) $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

(ii) Voor iedere rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ in $D \setminus \{c\}$ met $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ geldt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Het bewijs gaat precies zo als het bewijs van Stelling V.1.6, we laten het daarom als een oefening, zie Opgave V.2.3.

V.2.6 Voorbeeld. Laat $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, gegeven zijn door $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. We tonen aan dat $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Merk op dat

$$f(x) = (x+1)(x-1)/(x-1) = x+1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Het is eenvoudig om te zien dat $\lim_{x\to 1}(x+1) = 2$. Hieruit volgt het gevraagde. ∎

V.2.7 Voorbeeld. Laat $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = 1/x$. Neem eens aan dat er een $L \in \mathbb{R}$ is met $\lim_{x\to 0} f(x) = L$. Zij $\varepsilon = 1$. Volgens de definitie van de limiet is er een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt: als $0 < |x| < \delta$ dan $|f(x) - L| < \varepsilon$. We nemen zo'n δ. Dan geldt, voor $x \in (0, \delta)$, dat $f(x) \in (L-1, L+1)$. Maar $f[(0,\delta)] = (1/\delta, \infty)$. Dit is een tegenspraak. Dus heeft f geen limiet in 0. ∎

De volgende rekenregels voor limieten kunnen direct worden afgeleid uit Stelling V.2.5 en de rekenregels voor limieten van rijen.

V.2.8 Stelling. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$, en $c \in \mathbb{R}$ een verdichtingspunt van D. Neem aan dat $\lim_{x\to c} f(x) = L$ en $\lim_{x\to c} g(x) = M$. Dan

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$.

(ii) Voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt $\lim_{x\to c}(\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot L$.

(iii) $\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$.

(iv) Als $L \neq 0$, dan $\lim_{x\to c} 1/f(x) = 1/L$.

(v) $\lim_{x\to c} |f(x)| = |L|$.

(vi) Als voor alle $x \in D$ geldt $f(x) \leq g(x)$, dan $L \leq M$.

V.2.9 Opmerking.

(i) Ook geldt er weer een insluitstelling voor de limieten die we hier beschouwen.

(ii) De bovenstaande rekenregels gelden ook voor linker- en rechterlimieten.

We kunnen ook limieten van functies bekijken voor $x \to \infty$ of $x \to -\infty$. De precieze definitie is als volgt:

V.2.10 Definitie. Voor $a \in \mathbb{R}$ en een functie $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ zeggen we dat

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

als voor elke $\varepsilon > 0$ een $M \geq a$ bestaat zó dat voor alle $x \geq M$ geldt dat $|f(x) - L| < \varepsilon$. De definitie van $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ gaat analoog.

Voor deze limieten gelden ook weer de rekenregels van Stelling V.2.8.

Monotone functies

Als een functie $f : D \to \mathbb{R}$ niet continu is in een verdichtingspunt $c \in D$ dan kan de zogenoemde discontinuïteit van f in c verschillende vormen hebben. Zo kan het bijvoorbeeld zijn dat $\lim\limits_{x \uparrow c} f(x)$ en $\lim\limits_{x \downarrow c} f(x)$ beide niet bestaan (zie Opgave V.2.13). Het kan ook gebeuren dat f niet continu is in c, maar $\lim\limits_{x \uparrow c} f(x)$ en $\lim\limits_{x \downarrow c} f(x)$ bestaan wel.

V.2.11 Voorbeeld. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0, \\ x + 1 & \text{als } x \geq 0. \end{cases}$$

Er geldt $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = 0$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = 1$. Dus f is niet continu wegens Opmerking V.2.4.

V.2.12 Definitie. Zij $D \subseteq \mathbb{R}$. Een reële functie $f \colon D \to \mathbb{R}$ noemen we:

(i) *stijgend* als voor alle $x, y \in D$ uit $x < y$ volgt dat $f(x) \leq f(y)$.
(ii) *strikt stijgend* als voor alle $x, y \in D$ uit $x < y$ volgt dat $f(x) < f(y)$.

Dalende en *strikt dalende* functies definiëren we analoog.
Een functie die stijgend of dalend is wordt *monotoon* genoemd

V.2.13 Definitie. Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ noemen we *naar boven begrensd (naar beneden begrensd)* als er een $M \geq 0$ bestaat zó dat voor alle $x \in D$ geldt dat $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq M$). Een naar boven en beneden begrensde functie $f : D \to \mathbb{R}$ noemen we *begrensd*.

V.2.14 Stelling. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Als $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ een stijgende en naar boven begrensde functie is, dan bestaat $\lim\limits_{x \to b} f(x)$. Bovendien geldt dat

$$\lim_{x \to b} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (a, b)\}.$$

Bewijs. Laat $M = \sup\{f(x) : x \in (a, b)\}$. We bewijzen dat $\lim\limits_{x \to b} f(x) = M$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Aangezien $M - \varepsilon$ geen bovengrens is voor $\{f(x) : x \in (a, b)\}$ bestaat er een $x_1 \in (a, b)$ zó dat $f(x_1) > M - \varepsilon$. Neem $\delta = b - x_1$. Er volgt dat voor alle $x \in (a, b)$ met $0 < |x - b| < \delta$ geldt

$$|f(x) - M| = M - f(x) \leq M - f(x_1) < \varepsilon.$$

■

V.2.15 Opmerking. Analoog als in Steling V.2.14 kunnen we laten zien:

(i) Als f stijgend en naar beneden begrensd is, dan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in (a, b)\}$.
(ii) Als f dalend en naar beneden begrensd is, dan $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \inf\{f(x) : x \in (a, b)\}$.

(iii) Als f dalend en naar boven begrensd is, dan $\lim_{x\to a} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (a,b)\}$.

V.2.16 Gevolg. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Als $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ een stijgende functie is, dan geldt dat voor elke $c \in (a,b)$

$$\lim_{x\uparrow c} f(x) \quad \text{en} \quad \lim_{x\downarrow c} f(x) \;\; \text{bestaan}$$

en er geldt

$$\lim_{x\uparrow c} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\downarrow c} f(x).$$

In het bijzonder zijn de enige discontinuïteiten van f punten $c \in (a,b)$ waar geldt

$$\lim_{x\uparrow c} f(x) < \lim_{x\downarrow c} f(x).$$

Opgaven

1. Zij c een verdichtingspunt is van D. Bewijs dat een functie $f\colon D \to \mathbb{R}$ continu in c is dan en slechts dan als

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

2. Bewijs met behulp van de definitie dat $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat als

(a) $a = -1$, en $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = (x^2-1)/(x+1)$;

(b) $a = 2$, en $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1,2\} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = (x^3-3x-2)/(x^2-3x+2)$;

(c) $a = 0$, en $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = (x^2+x)/x$.

3. Bewijs Stelling V.2.5.

✍ **4.** Definieer $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Bestaat $\lim_{x\to 0} f(x)$? Zo ja, wat is de waarde van de limiet? Zo nee, waarom niet?

(b) Is f continu in 0?

✍ **5.** Laat $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$. Bewijs dat $\lim_{x\to 0} f(x)$ niet bestaat met behulp van Stelling V.2.5.

6. Laat $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x/|x|$. Bepaal of de $\lim_{x\to 0} f(x)$ bestaat.

7. Bewijs Stelling V.2.8.

8. Zij $f : D \to \mathbb{R}$ een functie en $c \in D$ een verdichtingspunt van D. Neem aan dat $f(x) \neq 0$ voor alle $x \in D$ en $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$. Toon aan dat $\lim_{x\to c} 1/f(x) = 0$.

9. Zij $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ een functie. Bewijs de volgende uitspraken:

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ bestaat dan en slechts dan als $\lim_{x\downarrow 0} f(\frac{1}{x})$ bestaat, en in dat geval geldt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(\frac{1}{x})$.

(b) $\lim_{x\to 0} f(|x|)$ bestaat dan en slechts dan als $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$ bestaat, en in dat geval geldt $\lim_{x\to 0} f(|x|) = \lim_{x\downarrow 0} f(x)$

10. Zij $D \subseteq \mathbb{R}$ en $c \in D$ een verdichtingspunt. Bewijs met de definitie van limiet: Als $f(c) < 0$ en $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ dan bestaat er een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$ geldt dat $f(x) < 0$.

✍**11.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$. Laat $c \in (a, b)$ en $L \in \mathbb{R}$. Bewijs: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan en slechts dan als $\lim_{x \uparrow c} f(x) = \lim_{x \downarrow c} f(x) = L$.

12. Herinner dat $D \subseteq \mathbb{R}$ een open verzameling is als er voor elke $x \in D$ een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq D$. Zij D een open verzameling. Toon aan dat elke $x \in D$ een verdichtingspunt is. is.

13. Laat $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(1/x)$. Toon aan dat $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$ en $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ beide niet bestaan.

14. Geef de details van het bewijs van Gevolg V.2.16.

✍**15.** Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stijgend zijn. Toon het volgende aan: als $f\big[[a, b]\big]$ een interval is, dan is f continu.