Uitwerking V.2

V.2.4
Definieer $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Bestaat $\lim_{x\to 0} f(x)$? Zo ja, wat is de waarde van de limiet? Zo nee, waarom niet?
(b) Is f continu in 0?

UITWERKING:

(a) We bewijzen dat $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
We moeten eerst aantonen dat 0 een verdichtingspunt van $(-1,1)$ is. Zij $\delta > 0$ willekeurig. Als $\delta > 1$ dan is $x = 1/2 \in (-1,1) \setminus \{0\}$ en $|x-0| = 1/2 < \delta$. Als $0 < \delta \leq 1$ dan is $x = \delta/2 \in (-1,1) \setminus \{0\}$ en $|x-0| = \delta/2 < \delta$.
We bewijzen nu dat $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta = 2007$. Dan is $\delta > 0$ en voor alle $x \in (-1,1)$ met $x \neq 0$ met $|x-0| = |x| < \delta$ geldt

$$\left|f(x) - 0\right| = |0-0| = 0 < \varepsilon;$$

merk op dat $f(x) = 0$ omdat $x \neq 0$.

(b) Als f continu in 0 is dan moet volgens Stelling V.1.4 voor elke rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(-1,1)$ met $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gelden dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0) = 1$. Neem $x_n = 1/(n+1)$. De rij $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ is in $(-1,1)$ en $\lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0$ maar

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 \neq 1 = f(0).$$

Conclusie: f is niet continu in 0.

Opgave V.2.5
Laat $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$. Bewijs dat $\lim_{x\to 0} f(x)$ niet bestaat met behulp van Stelling V.2.4.
UITWERKING:
Merk eerst op dat 0 een verdichtingspunt van $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ is (zie Opgave V.2.3(a), het bewijs is analoog). Beschouw de rij $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$. De rij is in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ en convergeert naar 0 (zie Huiswerk 7) maar

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

(zie Huiswerk 7). Omdat ∞ geen reëel getal is kunnen we volgens Stelling V.2.4 concluderen dat $\lim_{x\to 0} f(x)$ niet bestaat. (Als een $L \in \mathbb{R}$ bestaat met $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ dan moet $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}(n+1) = L$.)

Opgave V.2.11
Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Laat $c \in (a,b)$. Zij $L \in \mathbb{R}$. Bewijs:

(b) $\lim_{x\to c} f(x) = L$ dan en slechts dan als $\lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x) = L$.

UITWERKING:
“ $\Leftarrow$”: Neem aan dat $\lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x) = L$. We tonen aan dat $\lim_{x\to c} f(x) = L$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig.
Uit de definitie van $\lim_{x\to c-} f(x) = L$ volgt dat we een $\delta_1 > 0$ kunnen we vinden zó dat voor alle $x \in (a,b)$ met $c - \delta_1 < x < c$: $|f(x) - L| < \varepsilon$. $(\star)$
Uit de definitie van $\lim_{x\to c+} f(x) = L$ volgt dat we een $\delta_2 > 0$ kunnen we vinden zó dat voor alle $x \in (a,b)$ met $c < x < c + \delta_2$: $|f(x) - L| < \varepsilon$. $(\star\star)$
Definieer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Kies $x \in (a,b)$ zó dat $0 < |x - c| < \delta$ willekeurig. We tonen aan dat $|f(x) - L| < \varepsilon$. Er zijn 2 mogelijkheden: (i) $x < c$, (ii) $x > c$.

(i) $x < c$. Uit dit en $0 < |x - c| < \delta$ volgt $c - \delta < x < c$. Dus ook $c - \delta_1 < x < c$. Met ($\star$) volgt $|f(x) - L| < \varepsilon$.
(ii) $x > c$. Uit dit en $0 < |x - c| < \delta$ volgt $c < x < c + \delta$. Dus ook $c < x < c + \delta_2$. Met ($\star\star$) volgt $|f(x) - L| < \varepsilon$.
In beide gevallen zien we dat $|f(x) - L| < \varepsilon$. Dit bewijst het gevraagde.

" $\Rightarrow$": Neem aan dat $\lim_{x\to c} f(x) = L$. We bewijzen dat $\lim_{x\to c+} f(x) = L$. Kies $\varepsilon > 0$ willkeurig. Uit de definitie van $\lim_{x\to c} f(x) = L$ volgt dat we een $\delta > 0$ kunnen vinden zó dat voor alle $x \in (a, b)$ met $0 < |x - c| < \delta$ geldt dat $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Kies $x \in (a, b)$ met $c < x < c + \delta$ willekeurig. In het bijzonder geldt dat $0 < |x - c| < \delta$. Dus ook $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Het bewijs dat $\lim_{x\to c-} f(x) = L$ gaat net zo.