# Uitwerking V.3

---

**Opgave V.3.2**
Toon aan met behulp van de definitie dat de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door
$$f(x) = 5x$$
uniform continu is.

UITWERKING:
Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem $\delta = \varepsilon/5$. Dan is $\delta > 0$ en voor elke $x, y \in \mathbb{R}$ geldt: als $|x-y| < \delta$ dan
$$\big|f(x) - f(y)\big| = |5x - 5y| = 5|x-y| < 5\delta = 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

---

**Opgave V.3.3**
Laat zien dat de functie $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$, niet uniform continu is.

UITWERKING:
Neem $\varepsilon = 1$. Kies $\delta > 0$ willekeurig. We zoeken $x, y \in (0,1)$ zó dat $|x-y| < \delta$ en $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$. Kies $N \geq 1$ zó dat $1/N < \delta$. Neem $x = \frac{1}{N+1}$ en $y = \frac{1}{N+2}$. Dan volgt
$$|x-y| = \left|\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right| = \frac{1}{(N+1)(N+2)} < \frac{1}{N} < \delta$$
en $|f(x) - f(y)| = |N+1-(N+2)| = 1 = \varepsilon$.

---

**Opgave V.3.5b**
Laat $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ uniform continu zijn. Toon aan: als $f$ en $g$ begrensd zijn, dan is $fg$ uniform continu.

UITWERKING:
Omdat $f$ en $g$ begrensd zijn, bestaan $M > 0$ en $K > 0$ zó dat voor elke $x \in D$ geldt $\big|f(x)\big| < M$ en $\big|g(x)\big| < K$.

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Vind $\delta_1 > 0$ zó dat voor elke $x, y \in D$ geldt: als $|x-y| < \delta_1$ dan $\big|f(x) - f(y)\big| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$. Dit is mogelijk omdat $f$ uniform continu is. Vind ook $\delta_2 > 0$ zó dat voor elke $x, y \in D$ geldt: als $|x-y| < \delta_2$ dan $\big|g(x) - g(y)\big| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Dit is mogelijk omdat $g$ uniform continu is. Zij $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dan is $\delta > 0$ en voor elke $x, y \in D$ geldt: als $|x-y| < \delta$ dan
$$\begin{aligned}
\big|f(x)g(x) - f(y)g(y)\big| &= \big|f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)\big| \\
&= \big|f(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))\big| \\
&\leq |f(x)|\big|g(x) - g(y)\big| + |g(y)|\big|f(x) - f(y)\big| \\
&< M\big|g(x) - g(y)\big| + K\big|f(x) - f(y)\big| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + K\frac{\varepsilon}{2K} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

---

**Opgave V.3.8**
Laat $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = \sqrt{x}$. Bewijs direct met de definities dat $f$ uniform continu is, maar niet Lipschitz continu.

UITWERKING:
Merk eerst op dat voor alle getallen $a \geq b \geq 0$ geldt dat

(1) $$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a-b}.$$

Inderdaad. Aangezien beide zijden positief zijn geldt

$$\begin{aligned}\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a-b} &\iff (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a-b})^2. \\ &\iff a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq a-b \\ &\iff 2b+2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0\end{aligned}$$

Dit laatste is waar, en dit bewijst (**??**).

We tonen aan dat $f$ uniform continu is. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Definieer $\delta = \epsilon^2$. Kies $x, y \in [0, \infty)$ met $|x-y| < \delta$ willekeurig. Er zijn twee gevallen: (i) $x \geq y$ en (ii) $x < y$.

In geval (i) kunnen we schrijven:

$$|f(x) - f(y)| = \sqrt{x} - \sqrt{y} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

Uit (**??**) met $a = x$ en $b = y$ volgt dat $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x-y}$. Dus

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{x-y}{\sqrt{x-y}} = \sqrt{x-y} = \sqrt{|x-y|}.$$

We vinden dus

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x-y|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Geval (ii) volgt door in de bovenstaande berekening $x$ en $y$ te verwisselen. We concluderen dat $f$ uniform continu is.

Tenslotte bewijzen we dat $f$ niet Lipschitz continu is. Stel $f$ is Lipschitz continu. Dan bestaat er een $K > 0$ zó dat voor alle $x, y \in [0, \infty)$ geldt $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$. Neem $y = 0$ en $x = 1/(4K^2)$. Dan volgt $1/(2K) \leq 1/(4K)$. Dat kan niet. Dus $f$ is niet Lipschitz continu.

---

**Opgave V.3.6**

Stel $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ is uniform continu. Bewijs dat $\lim_{x \to 0} f(x)$ bestaat.

*Hint:* Neem een rij $(x_n)_{n \geq 1}$ in $(0, 1]$ met $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$. Toon aan dat $(f(x_n))_{n \geq 1}$ een Cauchy rij is. Met de volledigheid stelling geeft dit een kandidaat voor een limiet.

---

**Opgave V.3.9a**

Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die continu en begrensd is maar niet uniform continu.

*Hint:* Probeer $f(x) = \sin(x^2)$.

---

**Opgave V.3.9b**

Geef een voorbeeld van een functie $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ die continu en begrensd is maar niet uniform continu.

*Hint:* Probeer $f(x) = \sin(1/x)$.