V.3 Uniforme continuïteit

De continuïteit van $f: D \to \mathbb{R}$ betekent dat we voor iedere $c \in D$ en iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ kunnen vinden met de volgende eigenschap:

$$\text{voor alle } x \in D \text{ met } |x - c| < \delta \text{ geldt } \bigl|f(x) - f(c)\bigr| < \varepsilon.$$

Deze δ is afhankelijk van ε en c. We vragen ons nu het volgende af: wanneer bestaat er een δ die *onafhankelijk van c* is?

uniform continue functie

V.3.1 Definitie. Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}$. Een functie $f: D \to \mathbb{R}$ heet *uniform continu* als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } x, y \in D \text{ met } |x - y| < \delta \text{ geldt } \bigl|f(x) - f(y)\bigr| < \varepsilon.$$

Het volgt meteen uit deze definitie dat een uniform continue functie continu is, zie Opgave V.3.1.

V.3.2 Voorbeeld. Zij $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^2$. We bewijzen dat f uniform continu is. Laat $\varepsilon > 0$. We nemen $\delta = \varepsilon/2$. Voor alle $x, y \in [0, 1]$ met $|x - y| < \delta$ geldt dan

$$\bigl|f(x) - f(y)\bigr| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leqslant 2|x - y| < 2\delta = \varepsilon.$$

∎

Niet iedere continue functie is echter uniform continu.

V.3.3 Voorbeeld. Zij $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^2$. We beweren dat f niet uniform continu is. Immers, neem $\varepsilon = 1$ en zij $\delta > 0$. Neem nu $x = 1/\delta$ en $y = 1/\delta + \delta/2$. Voor deze x en y geldt dan $|x - y| < \delta$ en

$$\bigl|f(x) - f(y)\bigr| = |x^2 - y^2| = |x - y|\,|x + y| = \frac{1}{2}\delta|x + y| \geqslant \frac{1}{2}\delta \cdot \frac{2}{\delta} = 1 = \varepsilon.$$

∎

V.3.4 Voorbeeld. Zij $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = 1/x$. Er geldt dat f niet uniform continu is (zie Opgave V.3.3). ∎

De uniforme continuïteit in het eerste voorbeeld is geen toeval. Als het domein van een continue functie f een begrensd en gesloten interval is, dan zegt de volgende stelling dat de functie f automatisch uniform continu is. Merk op dat de bovenstaande voorbeelden aantonen dat geen van de voorwaarden "gesloten" en "begrensd" weggelaten kunnen worden.

V.3.5 Stelling. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Iedere continue functie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ is uniform continu.

Bewijs. Zij $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continu en stel eens dat f niet uniform continu is. We zullen een tegenspraak afleiden.

Omdat f niet uniform continu is, kunnen we niet voor alle $\varepsilon > 0$ een zodanige $\delta > 0$ vinden dat voor alle $x, y \in [a, b]$ met $|x - y| < \delta$ geldt $\bigl|f(x) - f(y)\bigr| < \varepsilon$.

Er is dus een $\varepsilon > 0$ zodanig dat voor er voor alle $\delta > 0$ een tweetal punten $x, y \in [a, b]$ bestaat waarvoor wèl geldt dat $|x - y| < \delta$, maar niet $\bigl|f(x) - f(y)\bigr| < \varepsilon$.

We nemen nu zo'n ε, en voor δ achtereenvolgens 1, 1/2, 1/3, enzovoort. Voor iedere $n \geqslant 0$ vinden we zo een tweetal punten $x_n, y_n \in [a, b]$ met

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1} \quad \text{en} \quad \big|f(x_n) - f(y_n)\big| \geqslant \varepsilon. \tag{V.1}$$

De rij $(x_n)_{n \geqslant 0}$ is begrensd, en met Stelling IV.4.4 van Bolzano-Weierstrass vinden we een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k \geqslant 0}$. Zij x de limiet van deze deelrij. Dan is $x \in [a, b]$. Voor alle $k \geqslant 0$ geldt

$$|y_{n_k} - x| \leqslant |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leqslant \frac{1}{n_k + 1} + |x_{n_k} - x|.$$

Wegens $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$ volgt hieruit dat de rij $(y_{n_k})_{k \geqslant 0}$ eveneens convergeert en dat

$$\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = x.$$

Omdat f continu is, levert dit

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x) = \lim_{k \to \infty} f(y_{n_k}).$$

Dus

$$\lim_{k \to \infty} \big(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big) = 0$$

Uit de definitie van een convergente rij volgt dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat met de volgende eigenschap: voor alle indices $k \geq N$ geldt

$$\big|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big| < \varepsilon.$$

Dit is in tegenspraak met de ongelijkheid (V.1). ■

Opgaven

1. Bewijs dat een uniform continue functie continu is.

✍ **2.** Toon aan met behulp van de definitie dat de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = 5x$$

uniform continu is.

✍ **3.** Toon aan dat dat de functie $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$ niet uniform continu is.

4. Toon aan dat iedere Lipschitz continue functie uniform continu is (vergelijk Opgave V.1.10).

5. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$ en $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ uniform continu zijn. Toon aan:

(a) $f + g$ is uniform continu.

✍ (b) Als f en g begrensd zijn, dan is fg uniform continu.

(c) Geef een voorbeeld waarin f en g uniform continu zijn en fg niet.

☆✍ **6.** Stel $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ is uniform continu. Bewijs dat $\lim_{x \to 0} f(x)$ bestaat.

7. Definieer $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \sqrt{x}$. Bewijs, direct met de definities, dat f uniform continu is, maar niet Lipschitz continu.

☆ **8.**

(a) Geef een voorbeeld van een functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die continu en begrensd is maar niet uniform continu.

(b) Geef een voorbeeld van een functie $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ die continu en begrensd is maar niet uniform continu.

9. Laat $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ uniform continu zijn. Toon aan dat f begrensd is.

☆**10.** Laat $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ uniform continu zijn. Toon aan dat er een unieke continue functie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ bestaat zó dat $g(x) = f(x)$ voor alle $x \in (0,1)$.