V.4 Eigenschappen van continue functies

We bestuderen een paar belangrijke stellingen over continue functies.

Maxima en minima

De stelling over continue functies die we in deze paragraaf bewijzen zegt dat een continue functie op een begrensd en gesloten interval altijd ergens een maximum en een minimum aanneemt. Om dit te bewijzen hebben we het volgende nodig.

V.4.1 Propositie. Laat $a, b \in \mathbb{R}$. Als $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu is, dan is f begrensd.

Bewijs. Neem aan dat f niet naar boven begrensd is. Kies voor iedere $n \geqslant 0$ een $x_n \in [a,b]$ met $f(x_n) \geqslant n$. Met behulp van de Bolzano-Weierstrass stelling vinden we een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k\geqslant 0}$ van $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Noem de limiet van deze deelrij x; merk op dat $x \in [a,b]$. Dan geldt dat $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Aan de andere kant geldt $(f(x_{n_k}))_{n\geq 0}$ is onbegrensd, omdat $f(x_{n_k}) \geqslant n_k$. Dit is een tegenspraak. Dus f is wel naar boven begrensd.

Door het bovenstaande toe te passen op $-f$ volgt dat f naar beneden begrensd is. ■

V.4.2 Stelling (Bolzano, 1817)**.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$. Zij $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan bestaan er $x_1, x_2 \in [a,b]$ zó dat

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{voor alle } x \in [a,b].$$

Met andere woorden f heeft een maximum en een minimum.

Bewijs. We laten zien dat f zijn maximum aanneemt. Bekijk de verzameling $V = \big\{ f(x) : x \in [a,b] \big\}$. Uit Propositie V.4.1 weten we dat V maar boven begrensd is. Zij

$$M = \sup V.$$

We moeten laten zien dat er een $x_2 \in [a,b]$ bestaat met $f(x_2) = M$. Stel dat zo'n x_2 niet bestaat. Dan geldt $f(x) < M$ voor alle $x \in [a,b]$. Bekijk nu de functie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Uit Stelling V.1.7 (iv) volgt dat g continu is. In het bijzonder zien we uit Propositie V.4.1 dat g begrensd is. Dus er bestaat een $K > 0$ zó dat $g(x) \leq K$. Er volgt

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq K, \quad \text{dus} \;\; M - f(x) \geq \frac{1}{K} > 0 \;\; \text{voor alle } x \in [a,b].$$

Dit geeft dat $f(x) \leq M - \frac{1}{K} < M$ voor alle $x \in [a,b]$. Maar dan is $M - \frac{1}{K}$ een kleinere bovengrens voor V. Tegenspraak.

Conclusie: er bestaat een $x_2 \in [a,b]$ zó dat $f(x_2) = M$.

Door bovenstaande toe te passen op $-f$ vinden we dat f zijn minimum aanneemt. ■

Nulpunten

Laat $D \subseteq \mathbb{R}$, en $f \colon D \to \mathbb{R}$. Een punt $x \in D$ waarvoor geldt dat $f(x) = 0$ noemen we een *nulpunt* van f. De volgende stelling laat zien dat een continue functie die op een interval van teken wisselt, altijd een nulpunt heeft.

Nulpuntstelling

V.4.3 Stelling (Nulpuntstelling)**.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu en neem aan dat $f(a) < 0 < f(b)$. Dan is er een $\xi \in (a,b)$ waarvoor geldt $f(\xi) = 0$.

Bewijs. Zij $V = \{x \in [a,b] : f(x) \leqslant 0\}$. Wegens $a \in V$, is V niet-leeg, en duidelijk is dat b een bovengrens voor V is. Dus bestaat $\xi = \sup V$, en er geldt $\xi \in [a,b]$. We tonen aan dat $f(\xi) = 0$.

Voor $n = 1, 2, \ldots$ is $\xi - \frac{1}{n}$ geen bovengrens van V, en dus bestaat er een $x_n \in V$ met $\xi - \frac{1}{n} < x_n \leq \xi$. Hieruit zien we dat $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Uit de continuïteit van f volgt dus dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$. Aangezien $f(x_n) \leq 0$ voor alle $n \geq 1$ geldt dat $f(\xi) \leq 0$.

Merk op dat wegens $f(\xi) \leq 0$ ook geldt dat $\xi < b$. We bewijzen nu $f(\xi) \geq 0$. Voor $n \geq 1$ voldoende groot geldt dat $\xi + \frac{1}{n} \leq b$. Aangezien $\xi + \frac{1}{n} > \xi$ volgt dat $\xi + \frac{1}{n} \notin V$ en dus $f(\xi + \frac{1}{n}) > 0$ voor alle $n \geq 1$ voldoende groot. Omdat $\lim_{n\to\infty} \xi + \dfrac{1}{n} = \xi$ volgt uit de continuïteit van f dat $f(\xi) \geq 0$.

We hebben bewezen dat $f(\xi) = 0$. Aangezien $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$ moet gelden dat $\xi \in (a,b)$.

■

V.4.4 Opmerking. Door $-f$ in plaats van f te beschouwen zien we dat een continue functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ met $f(b) < 0 < f(a)$ ook altijd een nulpunt heeft.

Het belang van de Nulpuntstelling is gelegen in het feit dat zij het bestaan van nulpunten garandeert, ook wanneer deze moeilijk of zelfs niet expliciet bepaald kunnen worden.

V.4.5 Voorbeeld. Beschouw de vergelijking $e^{-\frac{1}{2}x} = x$. We onderzoeken of dit oplossingen $x \in \mathbb{R}$ heeft. Het is duidelijk dat als er een oplossing is, deze in $[0, \infty)$ moet liggen. Bekijk de functie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - x$. Dan geldt $f(0) = 1$ en $f(1) = e^{-\frac{1}{2}} - 1 < 1 - 1 = 0$. In Paragraaf V.5 zullen we zien dat $x \mapsto e^x$ (en dus ook f) een continue functie is. Uit de nulpuntstelling dat er een $x_0 \in (0,1)$ is zó dat $f(x_0) = 0$. Dat wil zeggen $e^{-\frac{1}{2}x_0} = x_0$. In dit geval is het eenvoudig te zien dat er maar één oplossing is, omdat f strikt dalend is en dus injectief.

V.4.6 Voorbeeld. We gebruiken de Nulpuntstelling om te bewijzen dat ieder 3e-graads reëel polynoom p een reëel nulpunt heeft. Na delen door de kopcoëfficiënt is het polynoom van de vorm $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, met a, b, c in $\mathbb{R}$. Wegens

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right) = 1$$

is er een $\xi_1 > 0$ zodanig dat $p(\xi_1)/\xi_1^3 > 1/2$. Dan geldt $p(\xi_1) > \xi_1^3/2 > 0$. Op dezelfde manier volgt uit $\lim_{x\to-\infty} p(x)/x^3 = 1$ dat er een $\xi_0 < 0$ bestaat met $p(\xi_0)/\xi_0^3 > 1/2$, zodat $p(\xi_0) < \xi_0^3/2 < 0$. Uit de Nulpuntstelling volgt dan dat p een nulpunt heeft in het interval $[\xi_0, \xi_1]$.

Vaak is het handig om de volgende, iets algemenere, variant van de Nulpuntstelling tot onze beschikking te hebben:

Tussenwaardestelling

V.4.7 Gevolg (Tussenwaardestelling)**.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie, en neem aan dat $f(a) \leqslant f(b)$. Dan geldt: voor iedere t in $[f(a), f(b)]$ bestaat een $c \in [a,b]$ met $f(c) = t$.

Bewijs. Als $f(a) = t$ of $f(b) = t$ is er niets te bewijzen. Als $f(a) < t < f(b)$, pas dan de Nulpuntstelling toe op de functie $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = f(x) - t$. ■

Combinatie van Stellingen V.4.2 en V.4.7 levert het volgende op:

V.4.8 Stelling. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Als $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu is, dan geldt $f\big[[a, b]\big] = [m, M]$, waarbij $m \in \mathbb{R}$ het minimum van f is en $M \in \mathbb{R}$ het maximum van f is.

Herinner dat $f\big[[a, b]\big]$ het beeld van de verzamling $[a, b]$ is:

$$f\big[[a, b]\big] = \{y \in \mathbb{R} : \text{er bestaat een } x \in [a, b] \text{ met } y = f(x)\}.$$

Bewijs. Volgens Stelling V.4.2 bestaan er $x_1, x_2 \in [a, b]$ zó dat

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M \quad \text{voor alle } x \in [a, b].$$

Dus $f\big[[a, b]\big] \subseteq [m, M]$. Als $x_1 = x_2$, dan is f constant, en dus bestaat $f\big[[a, b]\big]$ uit één punt.

Stel nu dat $x_1 < x_2$. Volgens de Tussenwaardestelling (toegepast op het interval $[x_1, x_2]$ geldt dat f alle waarden tussen $[m, M]$ aanneemt. We zien dus dat $[m, M] = f([x_1, x_2]) \subseteq f\big[[a, b]\big] \subseteq [m, M]$. Dus $f\big[[a, b]\big] = [m, M]$.

Het geval $x_1 > x_2$ gaat analoog. ■

Inverse functies

We kunnen de bovenstaande stellingen gebruiken om het bestaan te bewijzen van reële getallen met bepaalde eigenschappen. Algemener kunnen we ze gebruiken om aan te tonen dat functies (continue) inverses hebben.

continue versie

V.4.9 Stelling (Inverse Functiestelling, continue versie)**.**
Laat $J = [a, b]$ een interval zijn, en $f : J \to \mathbb{R}$ een strikt stijgende functie. Definieer $I = f[J]$. Dan is $f : J \to I$ een bijectie, en de inverse functie $f^{-1} : I \to J$ is strikt stijgend en continu.

Bewijs. Uit Stelling V.4.8 volgt dat I een interval is. De surjectiviteit van f is duidelijk en de injectiviteit volgt uit het feit dat f strikt stijgent is. Dus de inverse $f^{-1} : I \to J$ bestaat. We laten eerst zien dat f^{-1} strikt stijgend is.

Stel $f(a) \leqslant y_1 < y_2 \leqslant f(b)$ en laat $x_1, x_2 \in [a, b]$ zijn met $f^{-1}(y_1) = x_1$ en $f^{-1}(y_2) = x_2$. Dan $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ en $x_1 \neq x_2$ (want $f(x_1) \neq f(x_2)$). Als $x_2 < x_1$ krijgen we een tegenspraak: $y_2 = f(x_2) < f(x_1) = y_1$. Er moet dus gelden dat $x_1 < x_2$ ofwel $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

We bewijzen nu de continuïteit. Zij $y_0 \in I$ en neem eerst aan dat y_0 geen eindpunt van I is. Zij $\varepsilon > 0$ en laat $x_0 = f^{-1}(y_0)$ zijn. Laat $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, x_0 - a, b - x_0\}$ zijn. Noem $x_1 = x_0 - \varepsilon'$ en $x_2 = x_0 + \varepsilon'$ en $y_1 = f(x_1)$ en $y_2 = f(x_2)$. Dan geldt $y_1 < y_0 < y_2$. Kies

$$\delta = \min\big\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\big\}.$$

Kies $y \in I$ met $|y - y_0| < \delta$ willekeurig. Dan geldt $y_1 < y < y_2$, en dus

$$x_0 - \varepsilon' = x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 = x_0 + \varepsilon'.$$

Dit geeft $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$. Als $y_0 \in I$ een eindpunt is dan kun je op dezelfde manier laten zien dat f^{-1} link- of rechtscontinu is in y_0. ■

V.4.10 Opmerking. Bovenstaand bewijs breidt uit naar het geval dat J een ander soort interval is (open, halfopen, oneindig, etc.).

Ter illustratie leiden we het bestaan van wortels af.

$\sqrt[k]{x}$ **V.4.11 Voorbeeld.** Zij $k \in \mathbb{N}$ met $k \geq 2$. De functie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ gedefinieerd door $f(x) = x^k$ is continu en strikt stijgend en $f\big[[0, \infty)\big] = [0, \infty)$. Uit Stelling V.4.9 volgt dat f een continue inverse $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ heeft. Notatie: $\sqrt[k]{x} = f^{-1}(x)$ en ook $x^{\frac{1}{k}} = f^{-1}(x)$.

Tegelijkertijd bewijst dit de existentie van wortels: voor elke $x \geq 0$ bestaat een uniek reëel getal $y \geqslant 0$ met de eigenschap dat $y^k = x$. Neem maar $y = f^{-1}(x)$.[4]

Opgaven

✍ **1.** De functie $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = 1/x$ is continu en voldoet aan $f(-1) = -1$ en $f(1) = 1$. Toch heeft f geen nulpunt. Leg uit waarom dit niet in strijd is met de Nulpuntstelling.

2. Bewijs dat er een $x \in \mathbb{R}$ bestaat die voldoet aan $2\sin(x) = x - 1$.

3. Bewijs dat iedere polynoomfunctie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van *oneven* graad een nulpunt heeft.

4. Beschouw de vergelijking

$$\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-3)^5} = 0,$$

waarbij $a, b > 0$. Toon aan dat deze vergelijking tenminste één oplossing heeft in het interval $(1, 3)$.

✍ **5.** Bewijs dat $x^3 + 3x + 5 = 0$ op het interval $[-2, -1]$ precies één oplossing heeft.

6. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = x^6 - 3x + 1.$$

✍ (a) Bereken $f(0)$, $f(1/2)$ en $f(1)$.
(b) Toon aan dat f een nulpunt heeft.
(c) Ga na dat $f(x) \geqslant 1$ voor alle $x \leqslant 0$.
(d) Ga na dat $f(x) \geqslant -1$ voor alle $x \geqslant 1$.
(e) Toon aan dat f een minimum heeft, en dat dit minimum ergens wordt aangenomen in het interval $[0, 1]$.

7. Definieer de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \frac{x^8 + x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1}.$$

(a) Toon aan dat f continu is. *Tip:* Gebruik Stelling V.1.7. De definitie van continuïteit hoef je niet meer te gebruiken bij deze opgave.
(b) Bewijs dat f tenminste 2 nulpunten heeft.
(c) Toon aan dat $f(x) \geq 0$ als $x \leq -1$, en dat $f(x) \geq 0$ als $x \geq 2$
(d) Bewijs dat f een minimum heeft, en dat dit minimum ergens wordt aangenomen in het interval $[-1, 2]$.

✍ **8.** Laat $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ functies zijn en neem aan dat voor alle $x \in [-1, 1]$ geldt $g(x) = |f(x)|$. Neem aan dat g een maximum en een minimum heeft. Bewijs of weerleg:

(a) f heeft een maximum of een minimum.

(b) f heeft een maximum en een minimum.

✍ **9.** Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn met $f\big[[a, b]\big] \subseteq [a, b]$. Toon aan dat[5] er een $x \in [a, b]$ is zó dat $f(x) = x$.

10. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Laat $m = \inf f\big[(a, b)\big]$ en $M = \sup f\big[(a, b)\big]$, waarbij we afspreken dat $m = -\infty$ als f niet naar beneden begrensd is, en $M = \infty$ als f niet naar boven begrensd is. Toon aan dat $f\big[(a, b)\big]$ een interval is met eindpunten m en M.

✰✍**11.** Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Definieer $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ als

$$g(x) = \max\{f(y) : y \in [a, x]\}.$$

Toon aan dat g continu is.

12. Ga na welke van de volgende functies $f : V \to W$ een inverse $f^{-1} : W \to V$ heeft, en of deze inverse continu is.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$

(b) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$

(c) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ met $f(x) = x^2$

(d) $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ met $f(x) = x^2$.

✰✍**13.** Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie en zij (x, y) een punt dat niet op de grafiek van f ligt. We gaan aantonen dat er een $t \in \mathbb{R}$ bestaat waarvoor de afstand tussen de punten $(t, f(t))$ en (x, y) minimaal is.
Zij $d(t)$ de afstand van het punt $(t, f(t))$ tot (x, y).

(a) Toon aan dat de functie $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is.

(b) Toon aan: als $|t - x| > \big|y - f(x)\big|$, dan is $d(t) > d(x)$. Teken een plaatje!

(c) Beredeneer dat de beperking van d tot het interval $\big[x - |y - f(x)|, x + |y - f(x)|\big]$ ergens op dit interval een minimum aanneemt.

(d) Beredeneer aan de hand van (b) dat het minimum uit (c) tevens het minimum van d is op heel $\mathbb{R}$.

✰**14.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu en neem aan dat $f(a) < 0 < f(b)$.
bisectie methode
Definieer $a_0 = a$, $b_0 = b$ en $x_0 = (b + a)/2$. Voor $n \geq 1$ definiëren we recursief

$$a_n = \begin{cases} (a_{n-1} + x_{n-1})/2, & \text{als } f(x_{n-1}) > 0, \\ x_{n-1}, & \text{als } f(x_{n-1}) \leq 0. \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} x_{n-1}, & \text{als } f(x_{n-1}) > 0, \\ (b_{n-1} + x_{n-1})/2, & \text{als } f(x_{n-1}) \leq 0. \end{cases}$$

en $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

(a) Bewijs dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent zijn naar dezelfde limiet L.

(b) Concludeer dat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

(c) Bewijs dat $f(L) = 0$.

---

[4] De oplettende lezer heeft gezien dat we in andere hoofdstukken al gebruik gemaakt hebben van $\sqrt[k]{x}$ en $x^{\frac{1}{k}}$.

[5] Een punt $x \in [a, b]$ met $f(x) = x$ wordt een dekpunt of vast punt genoemd.