Uitwerking V.4

Opgave V.4.5
Bewijs dat $x^3 + 3x + 5 = 0$ op het interval $[-2, -1]$ precies één oplossing heeft.
UITWERKING:

Beschouw de functie $f : [-2, -1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^3 + 3x + 5$. Uit de rekenregels voor de continuïteit volgt dat f continu is. Omdat $f(-2) = -9 < 0$ en $f(-1) = 1 > 0$ volgt uit de Nulpuntstelling dat er ten minste één $x \in [-2, -1]$ is met $f(x) = 0$. Om aan te tonen dat geen ander nulpunt van f bestaat is het voldoende om te laten zien dat f een strikt stijgende functie is.

Laat $x, y \in [-2, -1]$ zijn met $x < y$. Dan geldt $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) < 0$ omdat $x - y < 0$ en $x^2 + xy + y^2 > 0$, en dus $x^3 - y^3 < 0$. Hieruit volgt dat $x^3 + 3x + 5 < y^3 + 3y + 5$ en de functie f is strikt stijgend.

Opgave V.4.4
Bewijs dat de vergelijking

$$\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-3)^5} = 0,$$

waarbij a en b positieve reële getallen zijn, tenminste één oplossing heeft in het interval $(1, 3)$.
UITWERKING:

Beschouw de functie $f : (1, 3) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-3)^5}$. Omdat $x - 1 \neq 0$ en $x - 3 \neq 0$ voor $x \in (1, 3)$ is f volgens de rekenregels voor de continuïteit, continu.

Voor elke $n \geq 1$ is $1 + \frac{1}{n} \in (1, 3)$ en dus de rij $\left(f\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ bestaat. Voor de rij van de functiewaarden geldt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{(1 + \frac{1}{n} - 1)^3} + \frac{b}{(1 + \frac{1}{n} - 3)^5}\right) = \lim_{n\to\infty} an^3 + \frac{b}{(1 + \frac{1}{n} - 3)^5} = \infty$$

en dus moet er een $N \geq 2$ zijn met $f\left(1 + \frac{1}{N}\right) > 0$.

Analoog, voor elke $n \geq 1$ is $3 - \frac{1}{n} \in (1, 3)$ en dus de rij $\left(f\left(3 - \frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ bestaat. Voor de rij van de functiewaarden geldt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(3 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{(3 - \frac{1}{n} - 1)^3} + \frac{b}{(3 - \frac{1}{n} - 3)^5}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(3 - \frac{1}{n} - 1)^3} - bn^5 = -\infty$$

en dus moet er een $K \geq 1$ zijn met $f\left(3 - \frac{1}{K}\right) < 0$ (het is makkelijk te zien dat het altijd mogelijk is N en K zó te kiezen dat $1 + 1/N < 3 - 1/K$).

Volgens de Nulpunstelling is er een $x \in (1, 3)$ waarvoor geldt $f(x) = 0$. Zo'n x is een oplossing van de gegeven vergelijking.

Opgave V.4.9
Laat $f : [a, b] \to [a, b]$ een continue functie zijn. Toon aan dat er een $x \in [a, b]$ is zó dat $f(x) = x$.
UITWERKING:

Er is gegeven dat f waarden neemt binnen de verzameling $[a, b]$. Hieruit volgt in ieder geval $f(a) \geq a$ en $f(b) \leq b$. Er zijn dus drie mogelijkheden: (i) $f(a) = a$, (ii) $f(b) = b$, (iii) $f(a) > a$ en $f(b) < b$. In elk van de gevallen gaan we na dat we een $x \in [a, b]$ kunnen vinden met $f(x) = x$. In geval (i) kunnen we $x = a$ nemen. In geval (ii) kunnen we $x = b$ nemen.

In geval (iii) definiëren $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ als $g(x) = x - f(x)$. Er geldt $g(a) = a - f(a) < 0$ en $g(b) = b - f(b) > 0$. Dus uit de nulpuntstelling volgt dat er een $x \in (a, b)$ is zó dat $g(x) = 0$. Voor deze x volgt dat $x - f(x) = g(x) = 0$, dus $f(x) = x$.