V.5 De exponentiële functie

In deze paragraaf bewijzen we enkele belangrijke eigenschappen van de e-macht. Herinner uit Paragraaf IV.5 dat $e^x = \exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$ voor $x \in \mathbb{R}$.

V.5.1 Stelling. De volgende eigenschappen van de functie $x \mapsto e^x$ gelden:

(i) $x \mapsto e^x$ is strikt stijgend.
(ii) $x \mapsto e^x$ is continu.
(iii) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.
(iv) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Bewijs. (i): Herinner uit Paragraaf IV.5 dat $e^t > 1$ voor alle $t > 0$. Kies nu $x, y \in \mathbb{R}$ met $x < y$. Wegens Stelling IV.5.5 geldt

$$e^y = e^{y-x}e^x > e^x.$$

(ii): We tonen eerst aan dat $\lim_{x\to 0} e^x = 1$. *Bewering:* voor alle $x < 1$ geldt

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

Kies eerst $x \geq -1$. Uit Lemma IV.5.1 en de definitie van e^x volgt dat

$$e^x \geq \left(1 + \frac{x}{1}\right)^1 = 1 + x.$$

Indien $x < -1$, dan geldt $e^x > 0 > x + 1$. Dit bewijst $1 + x \leq e^x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Als we dit toepassen op $-x$ vinden we $1 - x \leq e^{-x}$. Met $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ volgt dat $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ als $x < 1$. Dit bewijst de bewering.

Uit de Bewering en de Insluitsluitstelling volgt dat $\lim_{x\to 0} e^x = 1$. Zij nu $c \in \mathbb{R}$ willekeurig. Duidelijk is dat $\lim_{x\to c} e^{x-c} = \lim_{h\to 0} e^h = 1$. Dus ook

$$\lim_{x\to c} e^x = e^c \lim_{x\to c} e^{x-c} = e^c \cdot 1 = e^c.$$

Hieruit volgt de continuïteit in c.

(iii): In het bewijs van de bewering hebben we gezien dat $e^x \geq 1 + x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Hieruit volgt $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

(iv): Aangezien $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ volgt nu uit (iii) dat

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} 1/e^x = 0.$$

■

V.5.2 Stelling. De functie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ gedefinieerd door $f(x) = e^x$ is inverteerbaar. De inverse is $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ is strikt stijgend en continu.

Bewijs. Dit volgt uit de Inverse Functie Stelling V.4.9 en Stelling V.5.1. ■

logaritme

Definieer $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ als de inverse van de e-macht: $\ln x = f^{-1}(x)$. De functie ln noemen we de natuurlijke logaritme, en wordt ook vaak genoteerd als log.

Merk op dat voor $n \in \mathbb{N}$ en $x > 0$ geldt dat

$$x^n = (e^{\ln x})^n = e^{\ln x + \cdots + \ln x} = e^{n \ln x}.$$

Voor $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt:

$$x^n = (e^{n \ln x}) = (e^{\frac{n}{m} \ln x})^m,$$

dus $x^{\frac{n}{m}} = e^{\frac{n}{m} \ln x}$. Er volgt nu eenvoudig dat $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ voor alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ en $x > 0$ door nogmaals $1 = e^u e^{-u}$ te gebruiken.

x^α Definiëer nu voor alle $x > 0$ en $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Men kan de volgende rekenregels afleiden

V.5.3 Stelling. Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $x, y > 0$. Dan geldt:

(i) $\ln 1 = 0$.
(ii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
(iii) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.
(iv) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.
(v) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
(vi) $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$.

V.5.4 Opmerking. In Opgave V.5.2 wordt je geacht aan te tonen dat de functie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ gegeven door $f(x) = a^x$ strikt stijgend, continu en inverteerbaar is. De inverse kunnen we ook uitrekenen. We hebben

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{x \ln a} \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = x \ln a.$$

We vinden dus $x = \frac{\ln y}{\ln a}$. Conclusie $f^{-1}(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$. Deze functie wordt meestal genoteerd als

$$\log_a(x) = f^{-1}(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Het getal $z = \log_a(x)$ is dus het unieke getal dat voldoet aan $a^z = x$.

Opgaven

1. Bewijs Stelling V.5.3.

2. Zij $a > 0$, en definieer $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ door $f(x) = a^x$. Toon aan:
(a) Als $a > 1$, dan is de functie f strikt stijgend, continu en inverteerbaar.
(b) Als $a \in (0, 1)$, dan is de functie f strikt dalend en continu.

✍ **3.** Laat zien dat $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ voor alle $x > 0$.

4. Uit Opgave V.5.3 zien we dat voor elke $n \geq 1$ geldt dat

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

✍ (a) Laat met behulp van bovenstaande zien dat voor elke $n \geq 1$ geldt dat

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \ln 2 \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

(b) Bewijs dat $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \ln 2.$

✍ **5.** (a) Toon aan dat dat $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

(b) Toon aan dat voor alle $\varepsilon > 0$ geldt dat $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0.$