VI.1 Convergentie van reeksen

Reeks

Laat $(a_j)_{j\geq 0}$ een rij reële getallen zijn. Uit $(a_j)_{j\geq 0}$ kunnen we voor ieder $n \in \mathbb{N}$ de *partiële som* vormen:

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

De rij van partiële sommen $(s_n)_{n\geqslant 0}$ wordt de *reeks* van $(a_j)_{j\geq 0}$ genoemd en zullen we in het vervolg noteren als

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \quad \text{of} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

De a_j's worden de *termen* van de reeks genoemd.

VI.1.1 Definitie. Een reeks $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ heet *convergent* met som $s \in \mathbb{R}$ als de rij $(s_n)_{n\geqslant 0}$ van partiële sommen convergent is en $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. In dit geval noteren we de som als

$$s = \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

Een reeks $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ die niet convergent is zullen we *divergent* noemen.

VI.1.2 Opmerking.

(i) De convergentie van $\sum_{j=k}^{\infty} a_j = a_k + a_{k+1} + \ldots$ wordt op een soortgelijke manier gedefineerd.

(ii) In het geval van convergentie heeft het symbool $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ dus *twee* betekenissen: de reeks en de som van de reeks.

meetkundige reeks

VI.1.3 Voorbeeld. De *meetkundige reeks* $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$, met $r \in \mathbb{R}$. Uit Paragraaf II.1 weten we dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} r^j = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{als } r \neq 1.$$

Als $|r| < 1$ dan geldt $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ en dus $\sum\limits_{j=0}^{\infty} r^j$ is convergent en[1]

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Als $|r| \geq 1$, dan is de reeks divergent. ▬

harmonische reeks

VI.1.4 Voorbeeld. De *harmonische reeks* $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$. We tonen aan dat deze reeks divergent is.

Laat $s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ voor $n \geq 1$.

Bewering: voor alle $m \in \mathbb{N}$ geldt dat $s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$. Uit de bewering volgt dat $(s_n)_{n\geq 1}$ divergeert. Er resteert om de bewering te bewijzen. Dit kun je met

[1] Het geval $r = \frac{1}{2}$ stemt overeen met het voorbeeld aan het begin van dit hoofdstuk.

behulp van volledige inductie in $m \in \mathbb{N}$ laten zien (zie Opgave VI.1.7). We geven een intuïtieve uitleg.[2] Er geldt:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1,\ s_2 = \frac{3}{2}, \\
s_4 &= s_2 + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) \geq \frac{3}{2} + \big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\big) = 2. \\
s_8 &= s_4 + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) \geq 2 + \Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big) = \frac{5}{2} \\
s_{16} &= s_8 + \Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\Big) \geq \frac{5}{2} + \Big(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\Big) = 3.
\end{aligned}$$

telescoopreeks

VI.1.5 Voorbeeld. De *telescoopreeks* $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)}$. Merk eerst op dat geldt $\frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$. Hieruit volgt dat voor alle $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \\
&= \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = 1 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)}$ convergent is en

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1.$$

VI.1.6 Opmerking. Zij $(a_j)_{j\geq 0}$ een reële rij.

(i) Laat $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Bekijk de reeksen

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \quad \text{en} \quad \sum_{j=k}^{\infty} a_j.$$

Noemen we partieële sommen van deze reeksen $(s_n)_{n\geqslant 0}$ en $(t_n)_{n\geq k}$ respektievelijk, dan geldt:

$$s_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1}) + t_n, \quad \text{voor elke } n \geq k.$$

Hier volgt dat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent is dan en slechts dan als $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ convergent is en in dit geval

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1}) + \sum_{j=k}^{\infty} a_j.$$

In het bijzonder volgt hieruit dat het convergentiegedrag van een reeks niet verandert als we eindig veel termen van de reeks veranderen (de som van de reeks verandert natuurlijk wel).

(ii) Als $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergeert, dan geldt $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} a_j = 0$. (zie Opgave VI.1.8).

VI.1.7 Stelling. Zij $(a_j)_{j\geq 0}$ een reële rij. Als de reeks $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergeert, dan geldt $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$.

[2] Een ander bewijs staat in Voorbeeld VI.2.6.

Bewijs. Laat $(s_n)_{n\geqslant 0}$ de rij van partiële sommen zijn. Dan geldt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Aangezien $a_n = s_n - s_{n-1}$ volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

■

VI.1.8 Opmerking.

(i) Uit Stelling VI.1.7 zien we direct dat $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$ divergeert als $|r| \geq 1$. Inderdaad, als $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$ wel convergent zou zijn, dan zou met Stelling VI.1.7 volgen dat $\lim_{j\to\infty} r^j = 0$, en dat is niet waar.

(ii) Merk op dat de omkering van Stelling VI.1.7 niet waar is:
De reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ is divergent, maar wel $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{1}{j} = 0$.

VI.1.9 Stelling. Laat $(a_j)_{j\geq 0}$ en $(b_j)_{j\geq 0}$ reële rijen zijn en laat $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Als $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ en $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ convergent zijn, dan is ook $\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha a_j + \beta b_j)$ convergent en

$$\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha a_j + \beta b_j) = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \beta \sum_{j=0}^{\infty} b_j.$$

Bewijs. Zie Opgave VI.1.6. ■

Opgaven

✍ **1.** Toon aan dat de volgende reeksen convergeren en bereken de som

$$\text{(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4^j + 1}{5^j}, \quad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \Big(-\frac{3}{4}\Big)^n \quad \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 + 7\cdot 4^k}{10^k}.$$

2. Toon aan dat de volgende reeksen convergeren en bereken de som

$$(a) \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j+2)(j+1)} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)k}.$$

3. Wat zegt Stelling VI.1.7 over de convergentie van de volgende reeksen:
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a}$ waarbij $a > 0$.
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1/n}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1/n}$
(d) $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j$.

4. Zij $|r| < 1$, $a \in \mathbb{R}$ en $k \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $\sum_{j=k}^{\infty} a \cdot r^j = \frac{ar^k}{1-r}$.

5. Laat $a_j = \sqrt{j+1} - \sqrt{j}$, voor elke $j \geq 0$.
(a) Toon aan dat $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = 0$.
(b) Toon aan dat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ divergent is.

6. Laat $(a_j)_{j\geq 0}$ en $(b_j)_{j\geq 0}$ beide reële rijen zijn en laat $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Laat $(s_n)_{n\geq 0}$ en $(t_n)_{n\geq 0}$ de partiële sommen van $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ en $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ zijn. Laat $(u_n)_{n\geq 0}$ de partële sommen van $\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha a_j + \beta b_j)$ zijn. Ga na dat voor alle $n \geq 0$ geldt

$$u_n = \alpha s_n + \beta t_n.$$

(b) Bewijs Stelling VI.1.9. Hint: gebruik (a) en rekenregels voor limieten.

7. Laat $s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ voor $n \geq 1$. In Voorbeeld VI.1.4 wordt beweert dat voor alle $m \geq 0$ geldt

$$s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}.$$

Bewijs dit met behulp van volledige inductie.

8. Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ een convergente reeks zijn. Merk op dat voor alle $k \geq 0$ de reeks $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ convergent is. Toon aan dat $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j = 0$.