VI.2 Reeksen met positieve termen

In deze paragraaf kijken we naar reeksen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ met $a_j \geq 0$ voor alle $j \in \mathbb{N}$. Merk op dat in dit geval voor de rij van partiële sommen $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ met $n \geq 0$, geldt dat

$$s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$$

Dus de rij van partiële sommen is stijgend. Uit Stelling IV.3.3 en Propositie IV.1.6 weten we dat zulke rijen convergeren precies wanneer ze naar boven begrensd zijn.

VI.2.1 Propositie. Zij $(a_j)_{j\geq 0}$ een rij met $a_j \geq 0$ voor alle $j \in \mathbb{N}$. Dan geldt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ is convergent dan en slechts dan als de rij van partiële sommen naar boven begrensd is.

Majorantenkenmerk

Een belangrijk gevolg is het volgende vergelijkingskenmerk.

VI.2.2 Stelling (Majorantenkenmerk van Weierstrass)**.** Als voor de rijen $(a_j)_{j\geq 0}$ en $(b_j)_{j\geq 0}$ geldt dat $0 \leq a_j \leq b_j$ voor alle $j \in \mathbb{N}$, en als $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ convergent is, dan is ook $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent.

Bewijs. Laat $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ en $t_n = \sum_{j=0}^{n} b_j$ voor elke $n \geq 0$. Er geldt $0 \leq s_n \leq t_n$ voor elke $n \geq 0$. De rij $(t_n)_{n\geq 0}$ is convergent en dus naar boven begrensd door een getal $M \geq 0$. Dus ook $(s_n)_{n\geq 0}$ is naar boven begrensd door M, en dus convergent wegens Propositie VI.2.1. ■

VI.2.3 Opmerking.

(i) Aangezien de convergentie van een reeks niet afhangt van het begin van de rij, geldt het Majorantenkenmerk ook indien er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat $0 \leq a_j \leq b_j$ voor alle $j \geq k$ en $\sum_{j=k}^{\infty} b_j$ convergent is.

(ii) Het Majorantenkenmerk kan ook gebruikt worden om divergentie van een reeks af te leiden. Immers, als $0 \leq a_j \leq b_j$ en is $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ divergent, dan moet $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ divergent zijn.

VI.2.4 Voorbeeld. (i) Bekijk de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$. Voor alle $j \geq 2$ geldt

$$0 \leq \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{j(j-1)}.$$

In Voorbeeld VI.1.5 hebben we gezien dat $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)}$ convergent is. Uit het Majorantenkenmerk volgt dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ convergent is.[3]

(ii) Bekijk de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3j+1}$. Er geldt

$$\frac{1}{3j+1} \geq \frac{1}{3j+j} = \frac{1}{4j}.$$

We weten dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ divergeert (harmonische reeks), en dus $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j}$ ook. Uit het Majorantenkenmerk volgt dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3j+1}$ divergent is.

Het volgende verdichtingscriterium van Cauchy zal handig zijn.

verdichtingscriterium van Cauchy

VI.2.5 Stelling. Zij $(a_j)_{j\geq 1}$ een rij getallen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zó dat $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$. Dan geldt

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \text{ is convergent } \iff \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} \text{ is convergent.}$$

Bewijs. Laat $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ en $t_n = \sum_{j=0}^{n} 2^j a_{2^j}$. Wegens Propositie VI.2.1 voldoet het te bewijzen dat $(s_n)_{n\geqslant 0}$ is begrensd $\Leftrightarrow$ $(t_n)_{n\geqslant 0}$ is begrensd.

"$\Rightarrow$" Neem aan dat $(s_n)_{n\geqslant 0}$ begrensd is door een reëel getal M_1. Laat $k \geq 0$. Dan geldt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t_k &= \frac{1}{2}\cdot a_1 + 2^0 a_2 + 2^1 a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &\leq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &= s_{2^k} \leq M_1. \end{aligned}$$

Dus $t_k \leq 2M_1$.

"$\Leftarrow$" Neem aan dat $(t_n)_{n\geqslant 0}$ begrensd is door een reëel getal M_2. Laat $n \geq 0$. Kies $k \in \mathbb{N}$ zó dat $n < 2^k$. Dan geldt

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^{k+1}-1} &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^k}) \\ &= 2^0 a_1 + 2^1 a_2 + 2^2 a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k \leq M_2. \end{aligned}$$

■

VI.2.6 Voorbeeld. Zij $p \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} \text{ is convergent } \iff p > 1.$$

Zij $a_j = \frac{1}{j^p}$ voor $j \geq 1$. Aangezien $(a_j)_{j\geq 1}$ dalend is, kunnen we Stelling VI.2.5 toepassen. Merk op dat $2^j a_{2^j} = 2^{j(1-p)} = r^j$, met $r = 2^{1-p}$. Dus wegens Voorbeeld VI.1.3 geldt: $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$ is convergent dan en slechts dan als $|r| < 1$. Dit laatste geldt dan en slechts dan als $p > 1$. ■

Limietkenmerk

De volgende stelling kan een handig hulpmiddel zijn om convergentie van reeksen aan te tonen.

VI.2.7 Stelling (Limietkenmerk)**.** Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ en $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ reeksen zijn. Neem aan dat er een $j_0 \in \mathbb{N}$ is zó dat voor alle $j \geq j_0$ geldt $a_j \geq 0$ en $b_j > 0$ en dat

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j}$$

bestaat. Als $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ convergent is, dan is ook $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent.

Bewijs. Definieer $L = \lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j}$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $j \geq N$ geldt dat $\left|\frac{a_j}{b_j} - L\right| < 1$. Er volgt dat voor alle $j \geq N$

$$0 \leq \frac{a_j}{b_j} \leq L + 1.$$

Dus $0 \leq a_j \leq (L+1)b_j$ voor all $j \geq N$. Uit het Majorantenkenmerk zien we dat uit de convergentie van $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ de convergentie van $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ volgt. ■

[3] Het is bekend dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \pi^2/6$, maar dit is ingewikkelder.

VI.2.8 Opmerking. Als in de bovenstaande stelling $\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} > 0$ is, dan bestaat ook

$$\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{a_j},$$

en dus geldt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ is convergent dan en slechts dan als $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ is convergent.

VI.2.9 Voorbeeld. Bekijk de reeks

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^4+4j}{j^6+3j^2+3}.$$

We passen het Limietkenmerk toe met $a_j = \frac{j^4+4j}{j^6+3j^2+3}$ en $b_j = \frac{1}{j^2}$. Er geldt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = 1.$$

Aangezien $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ convergeert volgt dat de reeks in $(*)$ ook convergeert. ▬

VI.2.10 Voorbeeld. Bekijk de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+\frac{1}{j}}}$. We passen het Limietkenmerk toe met $a_j = \frac{1}{j^{1+\frac{1}{j}}}$ en $b_j = \frac{1}{j}$. Er geldt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{a_j} = \lim_{j\to\infty} j^{\frac{1}{j}} = 1.$$

Aangezien $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ divergent is volgt ook dat $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ divergent is. ▬

Quotiëntenkenmerk

Het volgende kenmerk is handig voor veel reeksen.

VI.2.11 Stelling (Quotiëntenkenmerk)**.** Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ een reeks zijn. Neem aan dat $a_j > 0$ voor alle $j \in \mathbb{N}$ voldoende groot en dat

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = L$$

bestaat.

(i) Als $L < 1$ dan is de reeks convergent.
(ii) Als $L > 1$ dan geldt niet $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$, en dus is de reeks divergent.

Bewijs. (1): Kies $r \in \mathbb{R}$ zó dat $L < r < 1$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\frac{a_{j+1}}{a_j} < r$ voor alle $j \geq N$. Er volgt dat $a_{j+1} < ra_j$ voor alle $j \geq N$. Hieruit zien we dat voor $j \geq N$ geldt

$$0 < a_j < ra_{j-1} < r^2 a_{j-2} < \ldots < r^{j-N} a_N = (r^{-N} a_N) r^j.$$

Aangezien de reeks $\sum_{j=0}^{\infty} (r^{-N} a_N) r^j$ convergent is volgt uit het Majorantenkenmerk dat ook $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent is.

(2) : Zie Opgave VI.2.11. ■

VI.2.12 Opmerking. Er bestaan zowel convergente als divergente reeksen met $L = 1$. Bekijk maar eens $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$. Dit is een divergente reeks. Voor de termen geldt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1/(j+1)}{1/j} = 1.$$

Indien we de convergente reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ bekijken, dan geldt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1/(j+1)^2}{1/j^2} = 1.$$

Het geval $L = 1$ moeten we dus altijd nauwkeuriger onderzoeken.

VI.2.13 Voorbeeld. Bekijk $\sum_{j=1}^{\infty} j^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^j$. Dan geldt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{(j+1)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}}{j^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}} = \frac{1}{2}.$$

Dus de reeks is convergent wegens het Quotiëntenkenmerk. ▬

VI.2.14 Voorbeeld. Bekijk $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$. We passen het Quotiëntenkenmerk toe.

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1/(j+1)!}{1/j!} = \lim_{j\to\infty} \frac{j!}{(j+1)!} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j+1} = 0.$$

Dus de reeks is convergent.[4] ▬

Decimaal-ontwikkeling

Ten slotte bespreken we de decimaalontwikkeling van een reëel getal. We beperken ons tot het interval $[0,1]$. Een getal zoals bijvoorbeeld $x = 0.35673\ldots$ is eigenlijk niets anders dan een speciale reeks. We bedoelen hiermee namelijk niets anders dan

$$x = \frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \ldots$$

Algemener: als $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$ met $a_j \in \{0,1,2\ldots,9\}$ dan betekent dit

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{10^j}.$$

Uit het Majorantenkenmerk volgt dat de reeks convergent is. Inderdaad voor alle $j \geq 1$ geldt dat

$$0 \leq \frac{a_j}{10^j} \leq 9\left(\frac{1}{10}\right)^j,$$

en de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} 9\left(\frac{1}{10}\right)^j$ is convergent. Bovendien geldt

$$0 \leq x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{10^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} 9\left(\frac{1}{10}\right)^j = 9\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

Dus iedere decimaalontwikkeling stelt een reeël getal in $[0,1]$ voor. Omgekeerd heeft ieder reeël getal $x \in [0,1]$ een decimaalontwikkeling. (zie Opgave VI.2.16) Deze is niet uniek. Zo is bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} 0.179999\ldots &= \frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{9}{10^j} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{9}{10^3}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{10^j} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{9}{10^3}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{1}{10^2} = 0.18. \end{aligned}$$

[4] Er geldt $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e$ (zie Paragraaf VI.4).

Als we afspreken dat we geen “staarten” van negens toestaan dan is de decimaal-ontwikkeling wel uniek (zie Opgave VI.2.16).

Opgaven

1. Geef met behulp van het Majorantenkenmerk, Voorbeelden VI.1.4 en VI.2.4 een direct bewijs van het volgende

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p}$ is convergent als $p > 2$.

(b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p}$ is divergent als $p < 1$.

✍ **2.** Onderzoek welke van de volgende reeksen convergent zijn

$$(a) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^3+1} \qquad (b) \quad \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j}{j^2-1} \qquad (c) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j+1}{3^j+1}$$

✍ **3.** Onderzoek welke van de volgende reeksen convergent zijn

$$(a) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j(j+1)}{(j+4)^4} \qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 2^k}{k!} \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^8+3n)\frac{3^n}{4^{n+1}}$$

4. Toon aan: als $a_j \geq 0$ voor alle $j \geq 0$ en $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ is convergent, dan is $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2$ convergent.

5. Toon aan: als $a_j \geq 0$ en $(a_j)_{j\geq 0}$ is dalend en $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ is convergent, dan geldt $\lim\limits_{j\to\infty} j a_j = 0$.

6. Laat met een voorbeeld zien dat de eis dat $(a_j)_{j\geq 0}$ dalend is in Stelling VI.2.5, niet weggelaten kan worden.

7. Onderzoek welke van de volgende reeksen convergent zijn

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n} \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^8+3n)\frac{n^4}{3^n}$$

✯ **8.** Bewijs de volgende sterkere versie van het Limietkenmerk:[5] Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ en $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ twee reeksen zijn. Neem aan dat $a_j \geq 0$ en $b_j > 0$ voor alle $j \in \mathbb{N}$ en dat[6]

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{j\geq n} \frac{a_j}{b_j} \right)$$

bestaat. Toon aan: als $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ convergent is, dan is ook $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent.

9. Laat $a_j = 2^{-j}$ als j is even en 0 als j is oneven.

(a) Toon aan dat het Limietkenmerk met $b_j = 2^{-j}$ met $j \geq 0$ niet toegepast kan worden op deze rij.

(b) Toon aan dat de sterkere versie van het Limietkenmerk uit Opgave VI.2.8 wel toegepast kan worden. Wat geeft dit kenmerk voor informatie?

☆**10.** Onderzoek de convergentie van de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{j^j}$.

11. Bewijs Stelling VI.2.11 (2). Bewijs ook dat de reeks divergeert als $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{a_{j+1}}{a_j} = \infty$.

Wortelkenmerk **12.** Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ een reeks zijn. Neem aan dat $a_j \geq 0$ voor alle $j \geq 0$ voldoende groot en

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{a_j} = L$$

bestaat. Toon aan dat

✍ (a) Als $L < 1$ dan is de reeks convergent.

(b) Als $L > 1$ of $\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{a_j} = \infty$, dan is de reeks divergent.

(c) Geef zowel een voorbeeld van een convergente en een divergente reeks met $L = 1$.[7]

13. Definieer de rij $(a_j)_{j\geq 0}$ door $a_{2j} = 2^{-j}$ en $a_{2j+1} = 3^{-j}$, met $j \geq 0$.

(a) Laat zien dat het Quotiëntenkenmerk niet kan worden toegepast op deze rij.

(b) Laat zien dat het Wortelkenmerk wel toegepast kan worden op deze rij. Wat volgt er uit het Wortelkenmerk?

14. Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ een convergente reeks zijn met $a_j \geq 0$ voor alle $j \geq 0$. Toon aan dat

$$\sup\left\{\sum_F a_j : F \subset \mathbb{N} \text{ is eindig}\right\} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

☆✍**15.** Bepaal voor welke $p > 0$ geldt dat $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ convergent is.

☆**16.**

(a) Bewijs dat iedere $x \in [0, 1)$ een decimaalontwikkeling heeft.

(b) Indien we geen "staarten" van negens toestaan, bewijs dat de decimaalontwikkeling voor elke $x \in [0, 1)$ uniek is.

---

[5] Analoge versterkingen van het Quotiëntenkenmerk en het Wortelkenmerk gelden ook.

[6] $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{j\geq n}$ is niets anders dan $\limsup\limits_{j\to\infty}$ uit Opgave IV.3.7.

[7] In dit geval kan dus net als bij het Limietkenmerk geen uitspraak gedaan worden.