Uitwerking VI.2

Opgave VI.2.11

Bewijs Stelling VI.2.11 (2). Bewijs ook dat de reeks divergeert als $\lim_{j\to\infty} \dfrac{a_{j+1}}{a_j} = \infty$.

UITWERKING:

We geven alleen de uitwerking van het eerste deel van de opgave. Neem aan dat $L = \lim_{j\to\infty} \dfrac{a_{j+1}}{a_j}$ bestaat en $L > 1$. Kies $r \in \mathbb{R}$ zó dat $1 < r < L$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $j \geq N$ geldt dat $a_j \neq 0$ en $\frac{a_{j+1}}{a_j} > r$. Er volgt dat $\frac{a_{j+1}}{>} r a_j$ voor alle $j \geq N$. Hieruit volgt dat voor alle $j \geq N$ geldt dat

$$a_j > r a_{j-1} > r^2 a_{j-2} > \ldots > r^{j-N} a_N.$$

Aangezien $a_N > 0$ en $\lim_{j\to\infty} r^{j-N} = \infty$. Volgt dat de rij $(a_j)_{j\geq 0}$ niet naar boven begrensd is. Hieruit volgt in het bijzonder dat *niet* geldt dat $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$. Dus Stelling VI.1.7 laat zien dat de reeks $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ divergent is.