VI.3 Absolute convergentie

In deze paragraaf onderzoeken we reeksen waarvan de termen positief en negatief mogen zijn.[8] We beginnen met een equivalente formulering voor convergentie van reeksen.

VI.3.1 Stelling. Voor een rij $(a_j)_{j\geq 0}$ zijn de volgende uitspraken equivalent:

(i) De reeks $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ is convergent

(ii) Voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ met $m \geq n \geq N$ geldt

$$(*) \qquad \Big| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \Big| < \varepsilon.$$

Bewijs. Zie Opgave VI.3.1. ■

absoluut convergent

VI.3.2 Definitie. Een reeks $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ heet *absoluut convergent* als $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ convergent is.

VI.3.3 Stelling. Als $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ absoluut convergent is, dan is $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent. Bovendien geldt dan

$$\Big| \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Big| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|.$$

Bewijs. We gebruiken Stelling VI.3.1. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $m \geq n \geq N$ geldt dat $\sum_{j=n+1}^{m} |a_j| < \varepsilon$. Uit de driehoeksongelijkheid volgt dat voor alle $m \geq n \geq N$ geldt:

$$\Big| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \Big| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |a_j| < \varepsilon.$$

Nu volgt (weer uit Stelling VI.3.1) dat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent is.

Aangezien voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\Big| \sum_{j=0}^{n} a_j \Big| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j|$ volgt de ongelijkheid in de stelling als we de limiet voor n naar oneindig nemen en de rekenregels voor limieten gebruiken. ■

VI.3.4 Opmerking. De omkering van Stelling VI.3.3 geldt niet (zie Voorbeeld VI.3.8).

Als we nu de convergentie van $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ willen onderzoeken, dan kunnen we de volgende strategie proberen. Bekijk eerst $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$. Aangezien $|a_j| \geq 0$ kunnen we hierop de convergentie criteria van Paragraaf VI.2 toepassen. Als nu blijkt dat $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ convergent is, dan volgt uit bovenstaande stelling dat ook $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent is.

De volgende opmerking is vaak handig om divergentie af te leiden.

VI.3.5 Opmerking. Zij $(a_j)_{j\geq 0}$ een reele rij. Als $\lim_{j\to\infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} = L$ bestaat en $L > 1$, dan volgt uit het Quotiëntenkenmerk dat niet geldt $\lim_{j\to\infty} |a_j| = 0$. Hieruit volgt ook dat niet geldt $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$. Met Stelling VI.1.7 volgt dus dat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ divergent is.

[8] De bewijzen die we geven kunnen ook gebruikt worden voor reeksen waarbij de termen complexe getallen zijn.

VI.3.6 Voorbeeld. De reeks $\sum_{j=0}^{\infty} jx^j$ is voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < 1$ absoluut convergent, en dus ook convergent. Inderdaad, met $a_j = j|x|^j$ volgt dat

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{(j+1)x^{j+1}}{jx^j} = \lim_{j\to\infty} \frac{(j+1)}{j} x = x.$$

Dus het Quotientenkenmerk geeft de convergentie voor alle $|x| < 1$. Merk op dat de reeks niet convergent is als $|x| \geq 1$, omdat dan de termen niet naar nul gaan.

VI.3.7 Opmerking (Verwisselen van termen deel 1)**.** Als een reeks absoluut convergent is, dan is het toegestaan de elementen van de reeks in een andere volgorde op te tellen zonder de som te veranderen. Dit bewijzen we in Opgave VI.3.9.

Alternerende reeksen

Zij $(a_j)_{j\geq 0}$ een rij getallen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Reeksen van de vorm

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots$$

worden *alterenerende reeksen* genoemd.

Het volgende voorbeeld is een reeks die wel convergent is, maar niet absoluut convergent.

alternerende harmonische reeks

VI.3.8 Voorbeeld. Bekijk

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots.$$

Deze reeks is niet absoluut convergent want $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1}$ is divergent. We onderzoeken de convergentie met behulp van partiële sommen. Laat $s_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j+1}$ voor $n \geq 0$. Zij $x_n = s_{2n-1}$ voor $n \geq 1$ en $y_n = s_{2n}$ voor $n \geq 0$. Dan gelden de volgende eigenschappen (zie Opgave VI.3.4):

(i) $(x_n)_{n\geq 1}$ is stijgend.
(ii) $(y_n)_{n\geq 0}$ is dalend.
(iii) Voor alle $n \geq 1$ geldt $x_n \leq y_n$.
(iv) $\lim_{n\to\infty} y_n - x_n = 0$.

Uit Stelling IV.3.6 volgt nu dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en $(y_n)_{n\geqslant 0}$ beide convergeren naar hetzelfde getal s. Maar dan geldt ook dat $(s_n)_{n\geqslant 0}$ naar s convergeert.[9]

Kenmerk van Leibniz

Op een zelfde manier kun je de volgende stelling bewijzen:

VI.3.9 Stelling (Convergentie kenmerk van Leibniz)**.** Laat $(a_j)_{j\geq 0}$ een rij reële getallen zijn zó dat:

(1) $a_j \geq 0$ voor alle $j \geq 0$.
(2) $(a_j)_{j\geq 0}$ is dalend.
(3) $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$.

[9] In Opgave VI.3.8 wordt bewezen dat $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = \ln 2$.

Dan is de reeks $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots$ convergent.

VI.3.10 Voorbeeld. Bekijk de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\sqrt{j}}$. Merk op dat de reeks niet absoluut convergent is. De reeks is wel convergent wegens Stelling VI.3.9 met $a_j = \frac{1}{\sqrt{j}}$, met $j \geq 1$.

VI.3.11 Opmerking (Verwisselen van termen deel 2)**.** Indien een reeks convergent is maar niet absoluut convergent is het erg gevaarlijk om de volgorde van sommatie te veranderen. Hierdoor kan de som namelijk veranderen. Dit illustreren we aan de hand van de alternerende harmonische reeks. Stel eens dat we termen mogen verwisselen. Dan kunnen we het volgende doen:

$$\begin{aligned} s &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} \ldots \\ &= (1 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}) - \tfrac{1}{8} + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10}) - \tfrac{1}{12} \ldots \\ &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} \ldots \\ &= \tfrac{1}{2}\big(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} \ldots\big) \\ &= \tfrac{1}{2}s. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $s = 0$. Maar dat klopt niet want $s > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Blijkbaar mogen we dus geen termen verwisslen. Er is nog veel meer aan de hand: uit Riemann's *rearrangement theorem* (zie bijvoorbeeld wikipedia) volgt dat door de termen te verwisselen in bovenstaande reeks, je ieder reëel getal kunt krijgen als uitkomst.

Opgaven

1. Bewijs Stelling VI.3.1.
Hint voor (ii) $\Rightarrow$ (i): Gebruik de volledigheidsstelling voor de rij van partiële sommen.

2. Onderzoek of de volgende reeksen absoluut convergent en/of convergent zijn:

$$(a)\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j+2} \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \quad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \quad (d)\ \sum_{m=1}^{\infty} m(-1)^m.$$

3. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ de volgende reeksen absoluut convergent en/of convergent zijn

$$(a)\ \sum_{j=1}^{\infty} j^2 x^j \quad (b)\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} \quad (c)\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \quad (d)\ \sum_{j=1}^{\infty} j! x^j.$$

4. Ga na dat de eigenschappen (i)-(iv) in Voorbeeld VI.3.8 gelden.

5. Bewijs Stelling VI.3.9. Hint: Volg het argument in Voorbeeld VI.3.8.

6. Vervolg van Som VI.3.5. Zij $s_n = \sum_{j=0}(-1)^j a_j$ voor elke $n \geq 0$ en $s = \lim_{n\to\infty} s_n$.
Laat zien dat $|s - s_n| \leq a_{n+1}$.

7. Laat met behulp van tegenvoorbeelden zien dat geen van de voorwaarden (1), (2) of (3) weggelaten kan worden in Stelling VI.3.9.

✍ **8.** Beschouw de harmonische reeks $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1}$.

(a) Toon aan dat voor elke $n \geq 2$ geldt dat

$$x_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

waar $(x_n)_{n\geq 0}$ de rij uit in Voorbeeld VI.3.8 is.

(b) Bewijs dat $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} = \ln 2$.

☆✍ **9.** Neem aan dat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ absoluut convergent is. Zij $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een bijectie. Dan geldt $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\sigma(j)}$ is convergent en[10]

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\sigma(j)}.$$

[10]Het omgekeerde is ook waar: als de volgorde van sommeren niet uitmaakt, dan moet de reeks absoluut convergent zijn.