Uitwerking VI

Opgave VI.3.3b

Onderzoek voor welke $x \in R$ de volgende reeksen absoluut convergent en/of convergent zijn:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}.$$

UITWERKING:

We onderzoeken eerst de absolute convergentie. Zij $x \in \mathbb{R}$ willekeurig. Definieer $a_j = \left|\frac{x^j}{j}\right|$. We gebruiken het qoutiëntenkenmerk. Merk op dat

$$L = \lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = |x|.$$

Dus uit het quotiëntenkenmerk volgt dat de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ convergent is als $|x| < 1$ en divergent is als $|x| > 1$. Als $x = 1$ of $x = -1$ dan geldt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$. Dit is divergent, want het is de harmonische reeks. Conclusie de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$ is absoluut convergent dan en slechts dan als $x \in (-1, 1)$.

Vervolgens onderzoeken we de convergentie. Uit bovenstaande volgt dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$ convergent is als $x \in (-1, 1)$. Neem nu aan dat $|x| > 1$. Er volgt uit bovenstaande en het quotiëntenkenmerk (deel (2)) dat *niet* geldt dat $\lim_{j\to\infty} \left|\frac{x^j}{j}\right| = \lim_{j\to\infty} a_j = 0$. Dus ook geldt *niet* dat $\lim_{j\to\infty} \frac{x^j}{j} = 0$. Dus we vinden dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$ divergent is. Er resteert om $x = 1$ en $x = -1$ te onderzoeken. Als $x = 1$, dan geldt $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ en dit is divergent. Als $x = -1$ dan geldt $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j}$. Dit is een alternerende reeks die voldoet aan de voorwaarden van de stelling van Leibniz, en dus convergent is. Conclusie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$ is convergent dan en slechts dan als $x \in [-1, 1)$.