VI.4 De exponentiële functie

In deze paragraaf bespreken we een connectie tussen de reeks[11] $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ en de exponentiële functie e^x die we bestudeerd hebben in Paragrafen IV.5 en V.5. Herinner dat $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ voor $x \in \mathbb{R}$.

VI.4.1 Stelling. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ is (absoluut) convergent en

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

In het bijzonder geldt dus

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Bewijs. Net als in Voorbeeld VI.2.14 kan de convergentie worden aangetoond met het Quotientenkenmerk. Inderdaad voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|x^{j+1}/(j+1)!|}{|x^j/j!|} = \lim_{j\to\infty} \frac{|x|}{j+1} = 0.$$

Dit bewijst de absolute convergentie van de reeks. De convergentie volgt dan uit Stelling VI.3.3.

Nu bewijzen we dat de som gelijk is aan e^x. Zij $x \in \mathbb{R}$ willekeurig. Definieer

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \quad \text{en} \quad t_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Verder definiëren we $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ en $t = \lim_{n\to\infty} t_n = e^x$.
Bewering: Voor elke $\varepsilon > 0$ geldt dat $|s - t| \leq \varepsilon$.

Zij $\varepsilon > 0$. Met behulp van het Binomium van Newton (Stelling II.1.4) vinden we

$$t_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{x^j}{n^j} = 1 + x + \frac{n(n-1)}{n^2}\frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n^n}\frac{x^n}{n!}.$$

Er volgt

$$\begin{aligned} |s_n - t_n| &\leq \left(1 - \frac{n(n-1)}{n^2}\right)\frac{|x|^2}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n^n}\right)\frac{|x|^2}{n!} \\ &= \sum_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot(n-j+1)}{n^j}\right)\frac{|x|^j}{j!}. \end{aligned}$$

Zij $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Voor iedere $n > N$ kunnen we bovenstaande som in twee stukken splitsen:

$$\begin{aligned} |s_n - t_n| \leq &\sum_{j=N+1}^{n} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}\right)\frac{|x|^j}{j!} \\ &+ \sum_{j=2}^{N} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}\right)\frac{|x|^j}{j!}. \end{aligned}$$

[11] Hierbij spreken we af dat $0^0 = 1$.

Merk op dat voor de eerste term geldt:

$$\sum_{j=N+1}^{n}\Big(1-\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}\Big)\frac{|x|^j}{j!}\le\sum_{j=N+1}^{n}\frac{|x|^j}{j!}\le\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{|x|^j}{j!}.$$

Aangezien $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|x|^j}{j!}$ een convergente reeks is, kunnen we een $N\in\mathbb{N}_{\ge1}$ vinden zodat $\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{|x|^j}{j!}<\varepsilon$. Voor $n>N$ geldt dan

$$|s_n-t_n|\le\sum_{j=2}^{N}\Big(1-\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}\Big)\frac{|x|^j}{j!}+\varepsilon.$$

Uit de rekenregels voor limieten volgt dat (merk op $\sum_{j=2}^{N}$ is een eindige som)

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{j=2}^{N}\Big(1-\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}\Big)\frac{|x|^j}{j!}\\&\quad=\sum_{j=2}^{N}\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}\Big)\frac{|x|^j}{j!}\Big)=0.\end{aligned}$$

Uit de rekenregels voor limieten concluderen we dat $|s-t|\le\varepsilon$ en dit bewijst de bewering.

Uit de bewering volgt direct dat $s=t$, en dit bewijst de stelling. ■

$e\notin\mathbb{Q}$

VI.4.2 Stelling. Het getal e is irrationaal: $e\notin\mathbb{Q}$

Bewijs. Zij $s_n=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}$. Uit Stelling VI.4.1 volgt dat voor elke $n\ge1$ geldt

$$\begin{aligned}0<e-s_n=\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}&=\frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\Big)\\&\le\frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\Big).\end{aligned}$$

De reeks $\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^k}$ is een meetkundige reeks en we vinden dat[12]

$$0<e-s_n\le\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^k}=\frac{1}{n!}\frac{1}{n}.$$

Stel dat $e\in\mathbb{Q}$. Aangezien $e>0$ volgt dat $e=\frac{p}{q}$ met $p,q\in\mathbb{N}_{\ge1}$. Voor elke $n\ge1$ volgt dat

$$0<\frac{p}{q}-s_n\le\frac{1}{n!}\frac{1}{n}\quad\text{ofwel}\quad 0<n!\Big(\frac{p}{q}-s_n\Big)\le\frac{1}{n}.$$

Er geldt $n!s_n\in\mathbb{N}$ en $n!\frac{p}{q}\in\mathbb{N}$ als $n\ge q$. Er volgt dat $0<n!\frac{p}{q}-n!s_n\in\mathbb{N}$ voor alle $n\ge q$. Maar dan volgt

$$1\le n!\frac{p}{q}-n!s_n\le\frac{1}{n}\quad\text{voor alle } n\ge q.$$

Dit geeft een tegenspraak, dus $e\notin\mathbb{Q}$. ■

[12] Uit de afschatting volgt ook dat s_n heel snel naar e convergeert. Probeer maar eens $n=5$.