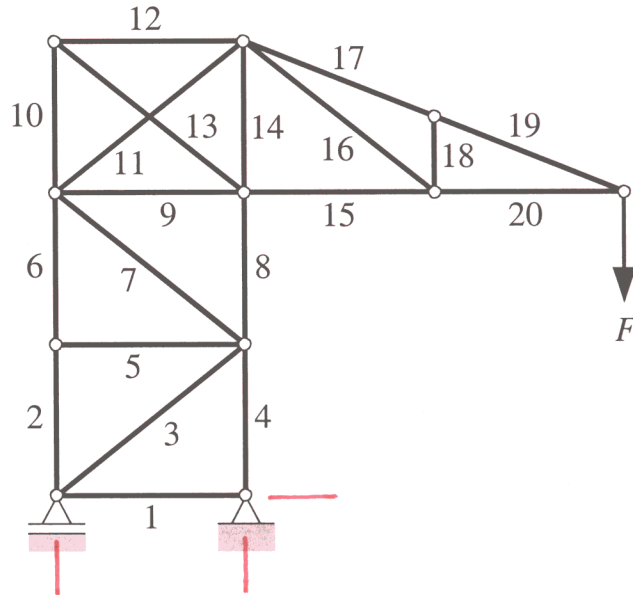


--	--	--	--	--	--	--

Opgave 1 (gewicht 0,8 - ongeveer 15 minuten)

Gegeven nevenstaand vakwerk, waarin de staven 11 en 13 elkaar kruisen.
 Het vakwerk wordt op de aangegeven wijze belast door de kracht F .
 Het eigen gewicht wordt verwaarloosd.



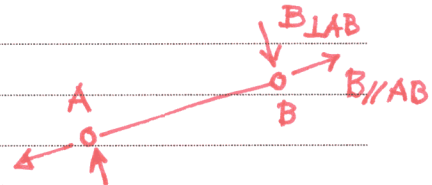
Gevraagd:

- a. Waarom worden de staven in een vakwerk alleen maar op normaalkracht belast en zijn er geen buigende momenten en dwarskrachten.

Een vakwerk heeft per definitie scharnierende knooppunten en wordt in de knooppunten belast door krachten. Een vakwerkstaaf wordt dus uitsluitend in zijn scharnierende uiteinden belast door krachten.

uit $\sum T/A = 0$ volgt $B_{\perp AB} = 0$

$B_{\parallel AB}$ geeft alleen maar normaalkracht in staaf AB.



- b. Hoeveelvoudig statisch onbepaald is het vakwerk? Motiveer uw antwoord.

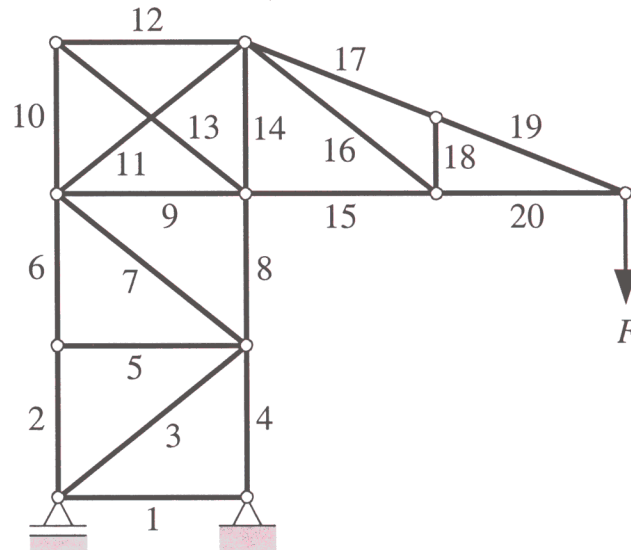
Er zijn $r = 3$ onbekende opslagreacties en $s = 20$ onbekende staafkrachten. Totaal $r + s = 23$ onbekenden. Per knooppunt worden 2 vergelijkingen voor het krachtenevenwicht geleverd. Met $k = 11$ knooppunten zijn dat $2k = 22$ evenwichtsvergelijkingen. Dat is één vgl. te weinig om alle 23 onbekenden op te kunnen lossen. De graad van statisch onbepaaldheid is:

$$n = (r + s) - 2k = 23 - 22 = 1$$

--	--	--	--	--	--	--	--

Opgave 1 (gewicht 0,8 - ongeveer 15 minuten)

Gegeven nevenstaand vakwerk, waarin de staven 11 en 13 elkaar kruisen.
Het vakwerk wordt op de aangegeven wijze belast door de kracht F .
Het eigen gewicht wordt verwaarloosd.



Gevraagd:

- a. Waarom worden de staven in een vakwerk alleen maar op normaalkracht belast en zijn er geen buigende momenten en dwarskrachten.

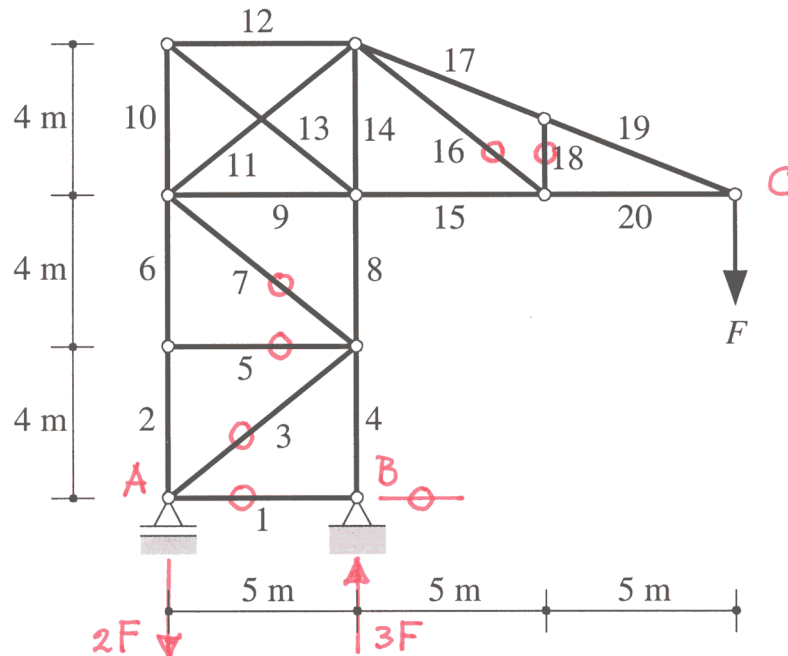
Variantuitwerking: Een vakwerkstaaf is een lichaam waarop in twee punten krachten aangrijpen. Een dergelijk lichaam is in evenwicht als beide krachten even groot, tegengesteld gericht en een gemeenschappelijke werklijn hebben. Bij de rechte vakwerkstaaf valt de werklijn samen met de staafas en is er dus alleen maar normaalkracht.

- b. Hoeveelvoudig statisch onbepaald is het vakwerk? Motiveer uw antwoord.

--	--	--	--	--	--	--	--

Opgave 2 (gewicht 1,2 - ongeveer 25 minuten)

Gegeven onderstaand vakwerk (hetzelfde als in opgave 1), waarin de staven 11 en 13 elkaar kruisen. Het vakwerk wordt op de aangegeven wijze belast door de kracht F . Het eigen gewicht wordt verwaarloosd.



Gevraagd:

- a. Bereken de oplegreacties. Teken ze in bovenstaande figuur in de richtingen waarin zij in werkelijkheid werken en schrijf de waarden er bij.

$$\sum T/A = 0 \rightarrow B_v = 3F (\uparrow)$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow A_v = 2F (\downarrow)$$

$$\sum F_h = 0 \rightarrow B_h = 0$$

- b. Van welke staven kunt u op voorhand zeggen dat het nulstaven zijn. Geef ze duidelijk aan in bovenstaande figuur.

Er zijn in totaal 6 nulstaven: 1, 3, 5, 7
 en: 16, 18

Voor vervolg opgave 2 zie volgend blad ►

--	--	--	--	--	--	--	--

Vervolg opgave 2

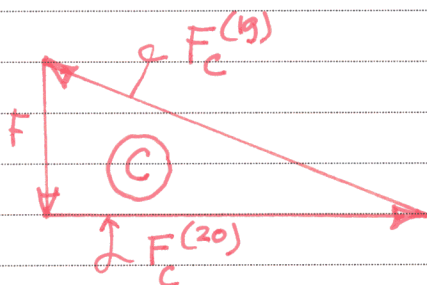
- c. Bereken voorzover dat mogelijk is alle andere staafkrachten met de goede tekens voor trek en druk¹. Verzamel alle waarden in onderstaande tabel. Plaats voor de staafkrachten die u niet kunt berekenen een kruisje in onderstaande tabel.

Staat	N	Staat	N
1	0	11	X
2	$+2F$	12	X
3	0	13	X
4	$-3F$	14	X
5	0	15	$-2,5F$
6	$+2F$	16	0
7	0	17	$+0,5F\sqrt{2}g$
8	$-3F$	18	0
9	X	19	$+0,5F\sqrt{2}g$
10	X	20	$-2,5F$

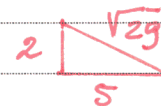
$$N^{(2)} = N^{(6)} = +2F ; N^{(4)} = N^{(8)} = -3F$$

$$N^{(15)} = N^{(20)} \text{ en } N^{(17)} = N^{(19)}$$

$N^{(19)}$ en $N^{(20)}$ volgen uit het krachtenevenwicht van knooppunt C (zie vorig blad).



$F_C^{(19)}$ is de kracht die staaf (19) uitoefent op knooppunt C. enz.



$$N^{(19)} = +F_C^{(19)} = +\frac{\sqrt{29}}{2}F = +2,69F$$

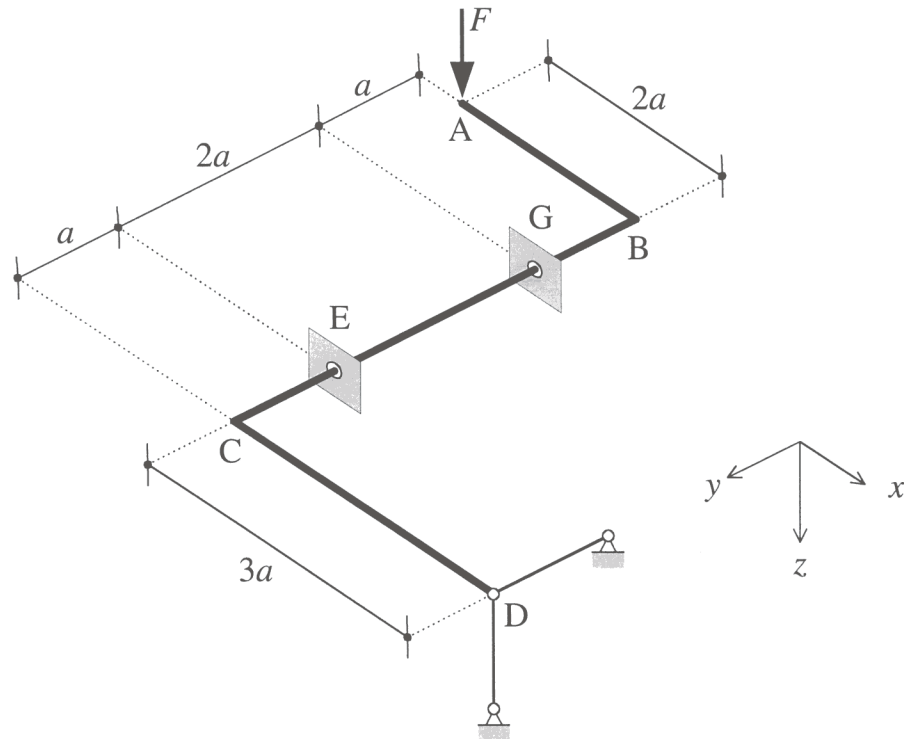
$$N^{(20)} = -F_C^{(20)} = -\frac{5}{2}F = -2,5F$$

¹ Trek positief en druk negatief.

--	--	--	--	--	--	--

Opgave 3 (gewicht 2,0 - ongeveer 40 minuten)

De hieronder getekende staaf ABCD is in B en C rechthoekig omgezet en ligt in het horizontale x - y -vlak. De staaf is in D opgelegd op een horizontale en verticale pendelstaaf¹. In E en G is de staaf opgelegd in lagers. De lagers kunnen alleen maar oplegreacties in het verticale vlak x - z -vlak leveren. De belasting bestaat uit de verticale kracht F in A.



Voor vervolg opgave 3 zie volgend blad ►

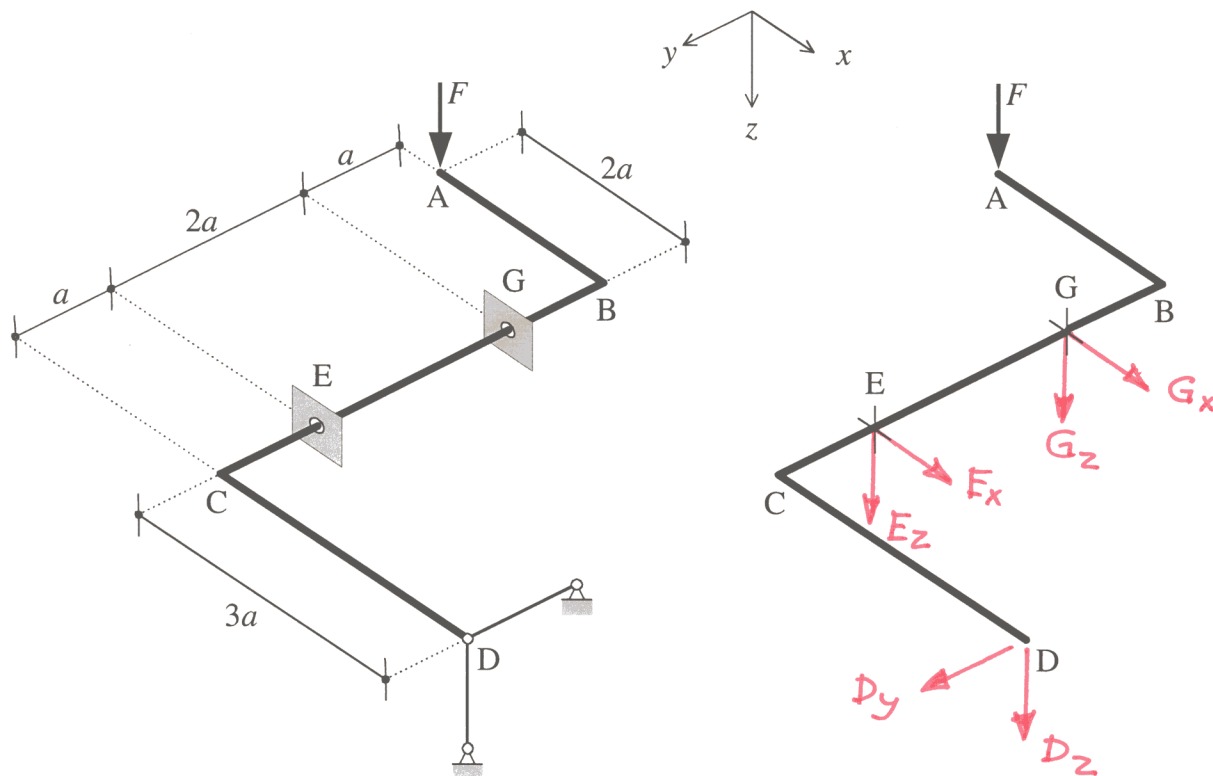
¹ Een pendelstaaf is een in beide einden scharnierende staaf zonder (uitwendige) belasting.

--	--	--	--	--	--	--

Vervolg opgave 3

Gevraagd:

- a. Maak ABCD vrij en teken in de rechter figuur (de horizontale en verticale component van) alle oplegreacties.



- b. Bereken alle oplegreacties. Geef duidelijk aan hoe u de berekening uitvoert. Verzamel de berekende waarden in de tabel op het volgende blad.

In het horizontale vlak werken 3 oplegreacties (D_y , E_x en G_x), maar er is in dat vlak geen belasting.

$$\rightarrow D_y = E_x = G_x = 0$$

Controle:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow D_y = 0; \sum T_z|G = 0 \rightarrow E_x = 0; \sum F_x = 0 \rightarrow G_x = 0$$

mbt de verticale oplegreacties:

$$\sum T_y|C = F \cdot 2a - D_z \cdot 3a = 0 \rightarrow D_z = +\frac{2}{3}F$$

$$\sum T_x|E = D_z \cdot a - G_z \cdot 2a - F \cdot 3a = 0 \rightarrow G_z = -\frac{7}{6}F$$

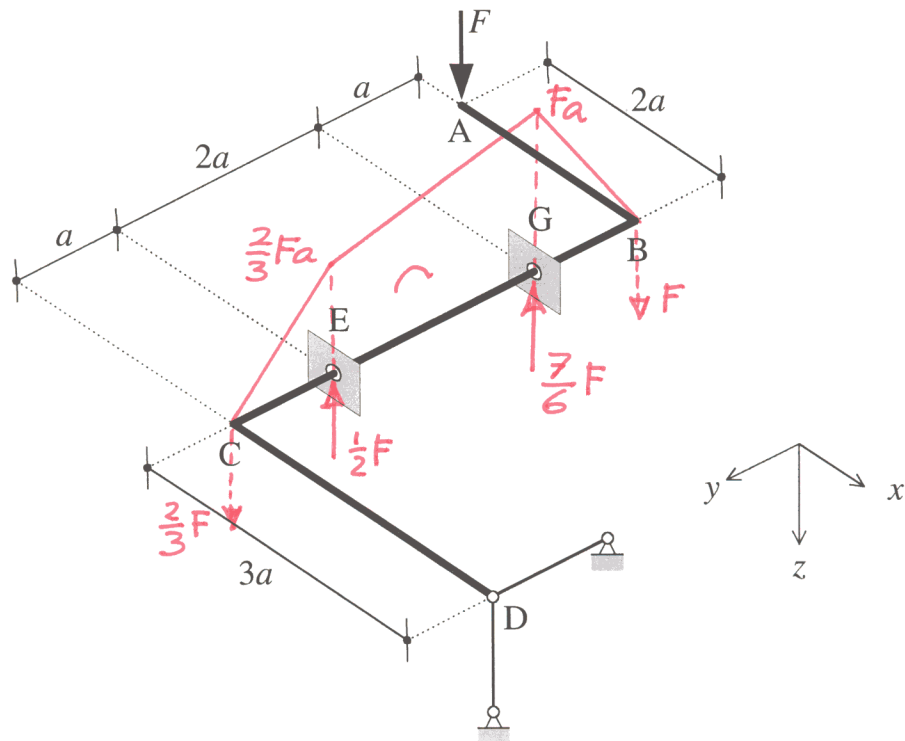
$$\sum F_z = F + G_z + E_z = 0 \rightarrow E_z = -\frac{1}{2}F$$

Voor vervolg opgave 3 zie volgend blad ►

--	--	--	--	--	--	--

oplegreactie	waarde
D_y	0
D_z	$+\frac{2}{3}F$
E_x	0
E_z	$-\frac{1}{2}F$
G_x	0
G_z	$-\frac{7}{6}F$

- c. Teken in onderstaande figuur de (buigende) momentenlijn voor BGEC met de vervormingstekens¹. Schrijf de waarden er bij.

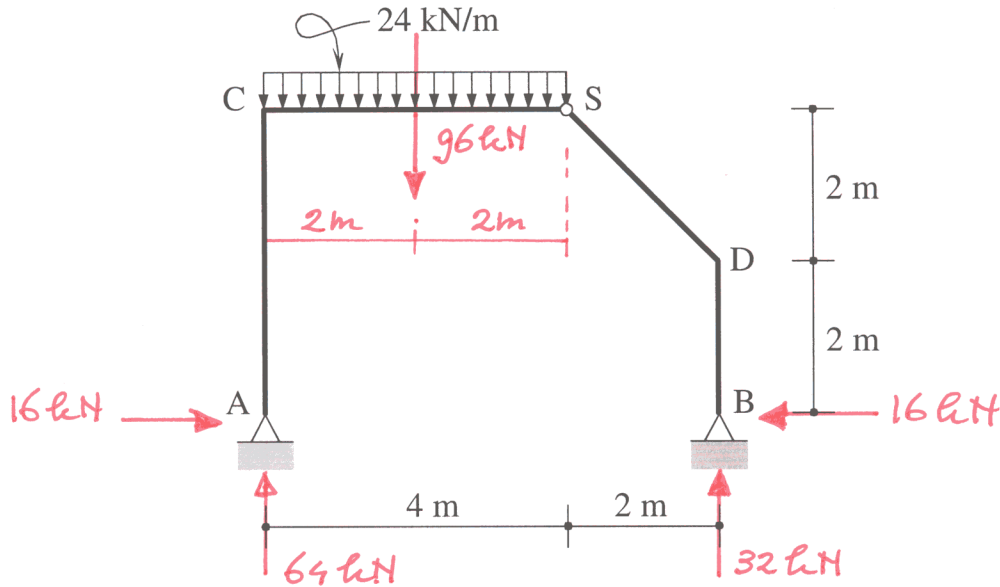


¹ Indien u geen vervormingstekens hanteert, geef dan op een andere manier duidelijk aan welke tekenafpraak u gebruikt.

--	--	--	--	--	--	--

Opgave 4 (gewicht 2,5 - ongeveer 45 minuten)

Gegeven onderstaand driescharnierenspan, bestaande uit de in A en B scharnierend opgelegde vormvaste delen ACS en BDS die in S scharnierend met elkaar zijn verbonden. Op het spant werkt over CS een gelijkmatig verdeelde belasting van 24 kN/m. De afmetingen kunnen uit de figuur worden afgelezen.



Gevraagd:

- a. Bereken (de horizontale en verticale component van) de oplegreacties. Teken ze in de figuur in de richtingen waarin zij in werkelijkheid werken en schrijf de waarden er bij.

Voor het gehele spant ASB: $\sum T/A = 0 \rightarrow B_v = 32 \text{ kN} (\uparrow)$

Voor deel BS: $\sum T/S = 0 \rightarrow B_h = 16 \text{ kN} (\leftarrow)$

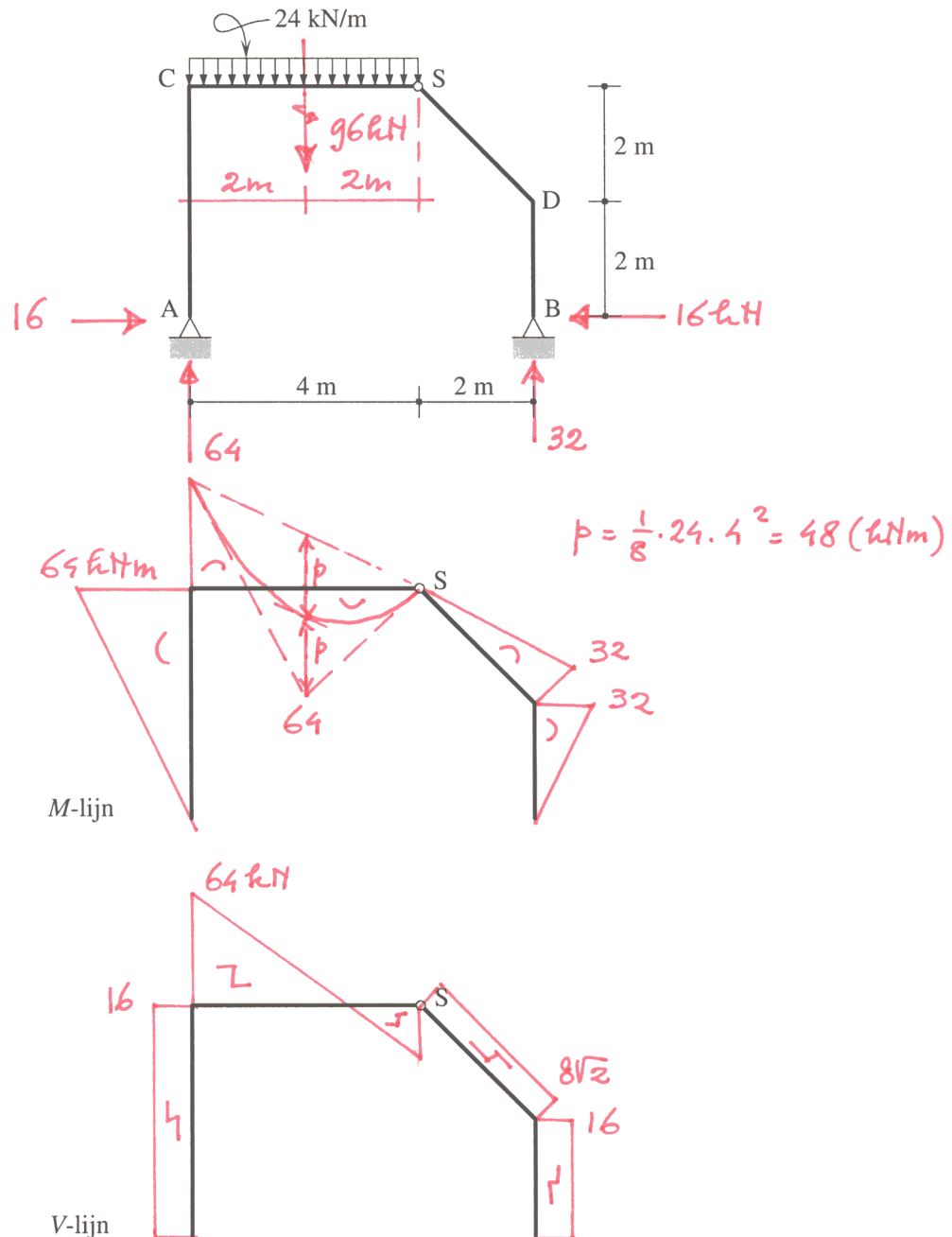
Voor het gehele spant ASB:

$$\sum F_h = 0 \rightarrow A_h = 16 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow A_v = 64 \text{ kN} (\uparrow)$$

Voor vervolg opgave 4 zie volgend blad ►

- b. Teken voor de gehele constructie de momentenlijn, met de vervormingstekens¹. Schrijf de significante waarden er bij. Teken in C en S ook de raaklijnen aan de momentenlijn voor CS en laat duidelijk zien waar de raaklijnen elkaar snijden.
- c. Teken voor de gehele constructie de dwarskrachtenlijn, met de vervormingstekens², en schrijf de significante waarden er bij.



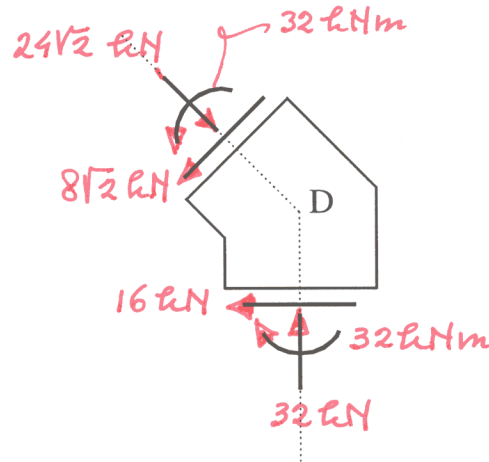
Voor vervolg opgave 4 zie volgend blad ►

¹ Indien u geen vervormingstekens hanteert, geef dan op een andere manier voor elk van de rechte staven duidelijk aan welke tekenafspraak u gebruikt.

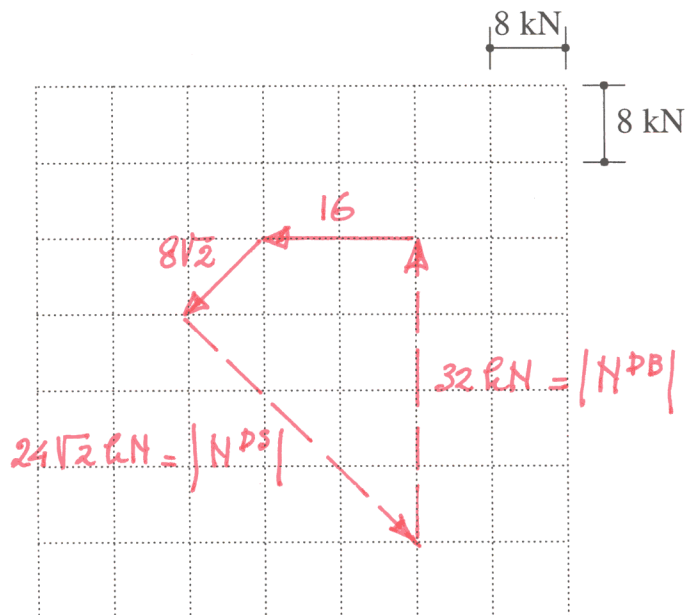
² Zie voetnoot 1.

--	--	--	--	--	--	--

- d. Maak knooppunt D vrij. Bereken en teken alle krachten en momenten die er op werken.



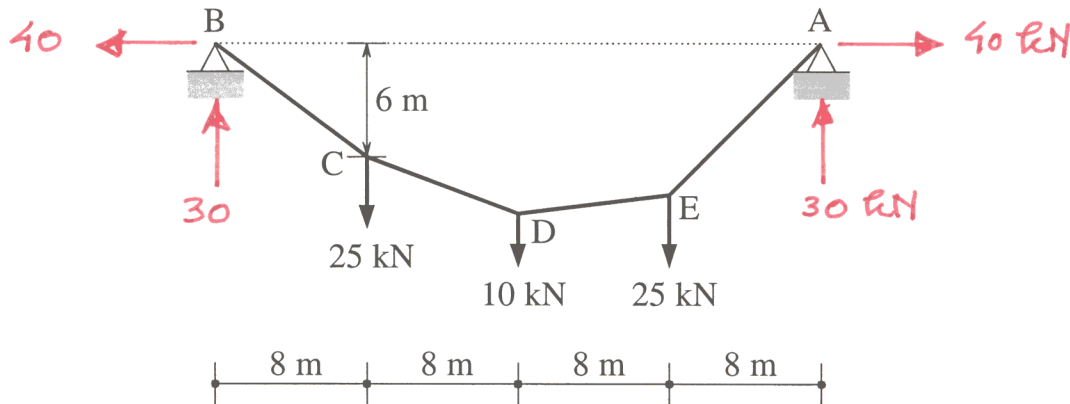
- e. Teken de krachtenveelhoek voor het krachtenevenwicht van knooppunt D. Kies als krachtenschaal: $8 \text{ kN} \equiv 1 \text{ cm}$.



--	--	--	--	--	--	--

Opgave 5 (gewicht 2,0 - ongeveer 30 minuten)

De hieronder getekende kabel overspant 32 m en wordt belast door drie verticale krachten waarvan de grootte in de figuur is aangegeven. Van de kabelvorm is alleen de doorhang in C gegeven; deze bedraagt 6 m.



Gevraagd:

- a. Bereken de horizontale en verticale component van de) oplegreacties in A en B.
Teken ze in bovenstaande figuur in de richtingen waarin zij in werkelijkheid werken en schrijf de waarden er bij.

$$\sum T|_B = 0 \rightarrow A_v = 30 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow B_v = 30 \text{ kN} (\uparrow)$$

B_h volgt uit de helling van BC:

$$B_h = \frac{8 \text{ m}}{6 \text{ m}} \cdot B_v = 40 \text{ kN} (\leftarrow)$$

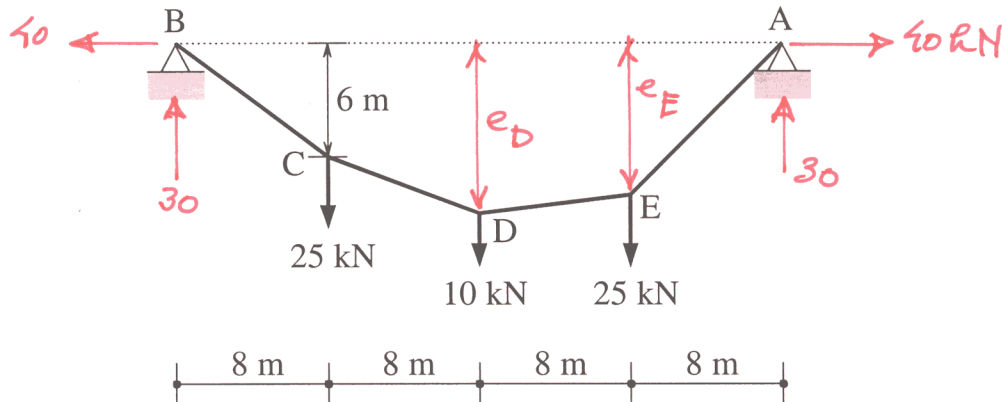
B_h kan men ook berekenen uit het momentenevenwicht van BC om C:

$$\sum T|_C^{BC} = 0 \rightarrow B_h = 40 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\sum F_h = 0 \rightarrow A_h = 40 \text{ kN} (\rightarrow)$$

Voor vervolg opgave 5 zie volgend blad ►

--	--	--	--	--	--	--



b. Bereken de doorhang van de kabel in respectievelijk D en E.

eenheden: kN en m

$$\sum T_D^{BCD} (\curvearrowright) = +40 \cdot e_D - 30 \cdot 16 + 25 \cdot 8 = 0 \rightarrow e_D = 7 \text{ m}$$

De kabel draagt een symmetrische belasting; de kabelvorm zal dus ook symmetrisch zijn.

$$\rightarrow e_E = e_C = 6 \text{ m}$$

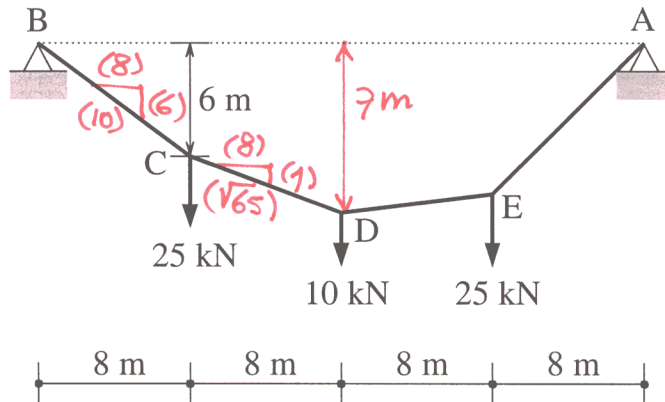
$$\text{men kan dit ook vinden met } \sum T_E^{BCDE} = 0$$

c. Bereken de maximum kabelkracht. Waar treedt deze op?

De horizontale component van de kabelkracht is in alle velden gelijk. De maximum kabelkracht treedt dan op in het veld met het steilste kabelverloop: dat is in BC en AE.

$$N^{BC} = N^{AE} = \sqrt{(30 \text{ kN})^2 + (40 \text{ kN})^2} = 50 \text{ kN}$$

--	--	--	--	--	--	--

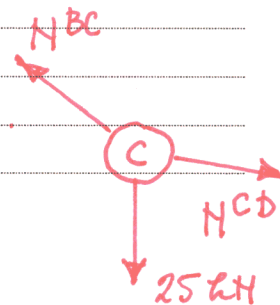


b. Bereken de doorhang van de kabel in respectievelijk D en E.

Variant metwerking deelnaag c.

Bekijk krachterevenwicht knooppunt C.
 met krachtenveelhoek of analytisch.
 Hieronder de analytische uitwerking.

c. Bereken de maximum kabelkracht. Waar treedt deze op?



$$\sum F_v (\downarrow) = -\frac{6}{10} N^{BC} + \frac{1}{\sqrt{65}} N^{CD} + 25 \text{ kN} = 0$$

$$\sum F_h (\rightarrow) = -\frac{8}{10} N^{BC} + \frac{8}{\sqrt{65}} N^{CD} = 0$$

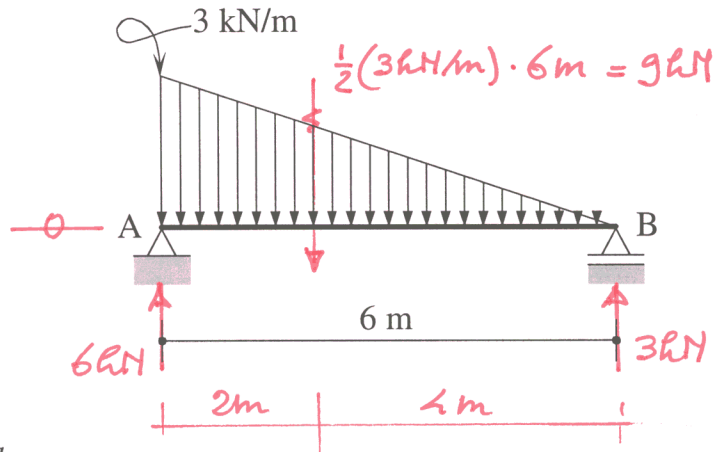
Oplossing: $N^{BC} = 50 \text{ kN}$; $N^{CD} = 5\sqrt{65} \text{ kN} = 40,3 \text{ kN}$

Vanwege symmetrie: $N^{BC} = N^{AE} = 50 \text{ kN}$ is max. kabelkracht.

--	--	--	--	--	--	--

Opgave 6 (gewicht 1,5 - ongeveer 25 minuten)

De hieronder getekende vrij opgelegde ligger AB, met een overspanning van 6 m draagt een verdeelde belasting die lineair verloopt van 3 kN/m in A naar nul in B.



Gevraagd

- a. Bereken de oplegreacties. Teken ze in bovenstaande figuur zoals ze in werkelijkheid werken en schrijf de waarden er bij.

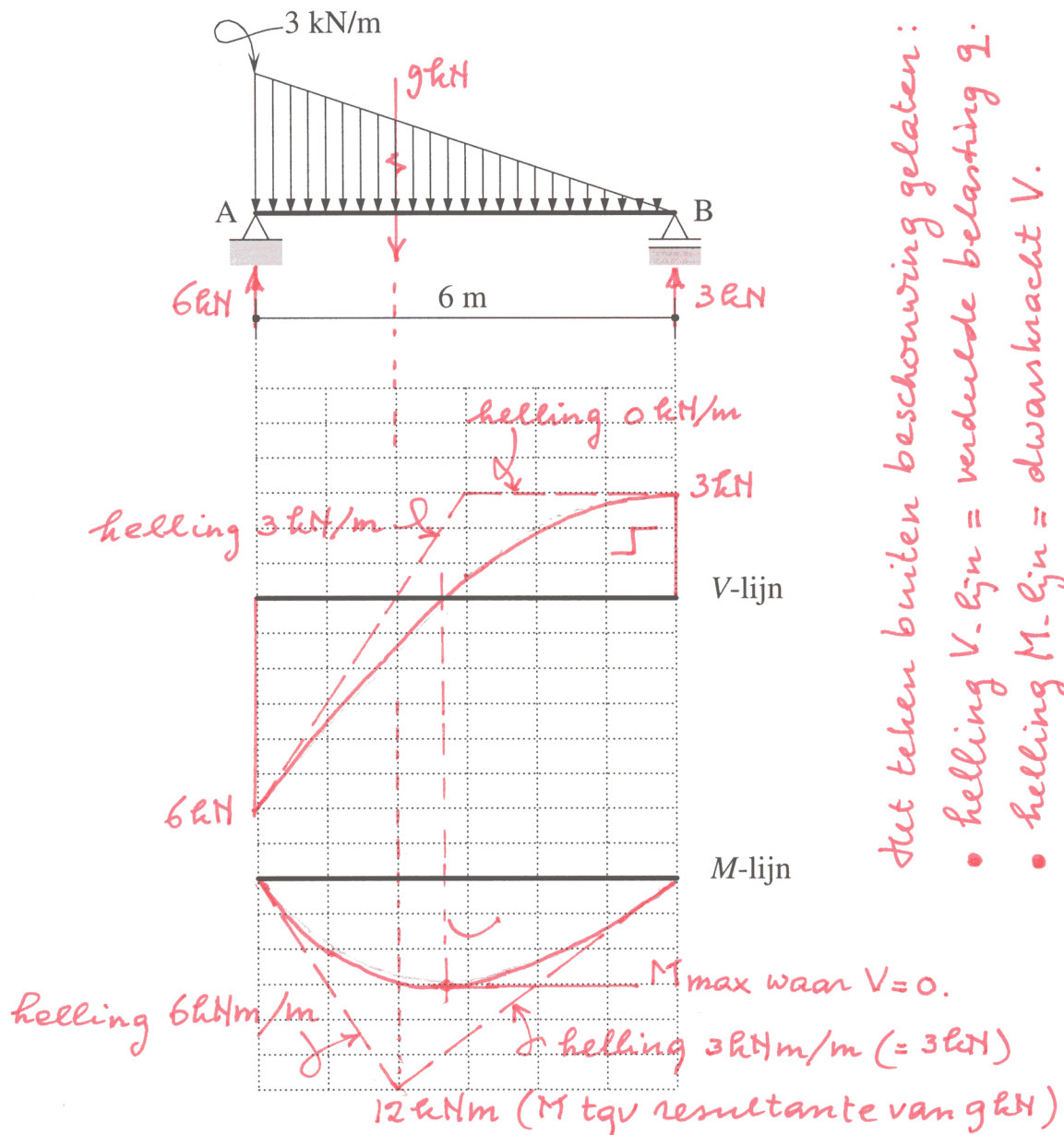
$$\sum T/A = 0 \rightarrow B_v = 3 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum T/B = 0 \rightarrow A_v = 6 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_h = 0 \rightarrow A_h = 0$$

Voor vervolg opgave 6 zie volgend blad ►

- b. Geef een duidelijke schets van de dwarskrachtenlijn, met de vervormingstekens¹, zonder de dwarskracht als functie van x te berekenen. Schrijf de significante waarden er bij. Teken ook de raaklijnen in A en B.
- c. Geef een goede schets van de momentenlijn, met de vervormingstekens², zonder het buigend moment als functie van x te berekenen. Teken ook de raaklijnen in A en B en laat duidelijk zien waar deze raaklijnen elkaar snijden.



¹ Indien u geen vervormingstekens hanteert, geef dan op een andere manier duidelijk aan welke tekenafpraak u gebruikt.

² Zie voetnoot 1.