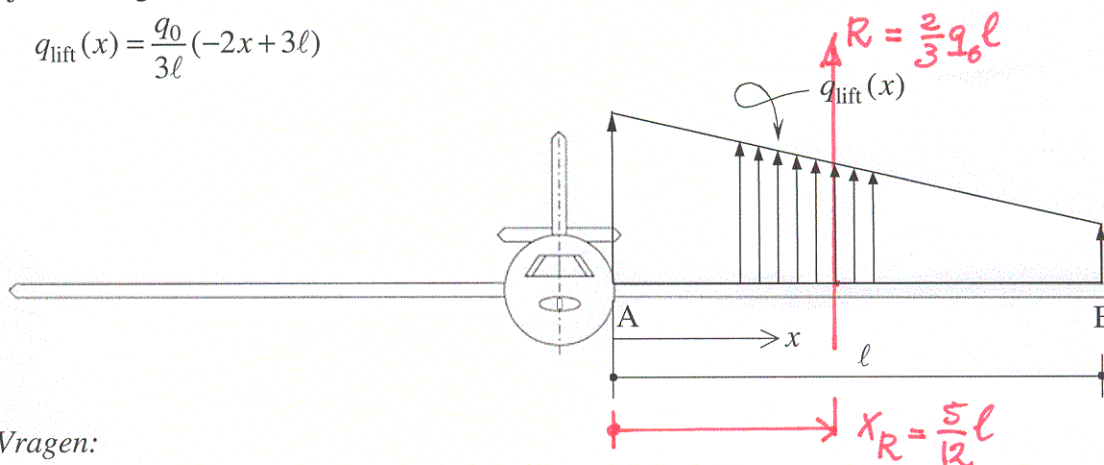


|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

**Opgave 1** (gewicht 2,0 - ongeveer 40 minuten)

Een vliegtuig krijgt tijdens een kruisvlucht plotseling door turbulentie te maken met een asymmetrische liftverdeling. Op een bepaald ogenblik kan deze voor (de tot lijnelement geschematiseerde) vleugel AB worden geschematiseerd tot de volgende verdeelde lijnbelasting:

$$q_{\text{lift}}(x) = \frac{q_0}{3\ell}(-2x + 3\ell)$$



Vragen:

- a. Bepaal de resultante van de liftverdeling op vleugel AB.

$$R = \int_0^l q_{\text{lift}} dx = \frac{q_0}{3\ell} \int_0^l (-2x + 3\ell) dx = \frac{q_0}{3\ell} (-x^2 + 3\ell x) \Big|_0^l = \frac{2}{3} q_0 \ell \quad (\uparrow)$$

- b. Bepaal de x-coördinaat van de werklijn van deze resultante. Teken de resultante in bovenstaande figuur en schrijf de waarden van plaats en grootte er bij.

$$\begin{aligned} \Sigma \mathcal{M}_A \curvearrowright &= \int_0^l x \cdot q_{\text{lift}} dx = x_R \cdot R \\ \int_0^l x \cdot q_{\text{lift}} dx &= \frac{q_0}{3\ell} \int_0^l (-2x^2 + 3\ell x) dx = \frac{q_0}{3\ell} \left( -\frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} \ell x^2 \right) \Big|_0^l = \frac{5}{18} q_0 \ell^2 \\ x_R &= \frac{\int x q_{\text{lift}} dx}{R} = \frac{\frac{5}{18} q_0 \ell^2}{\frac{2}{3} q_0 \ell} = \frac{5}{12} \ell \end{aligned}$$

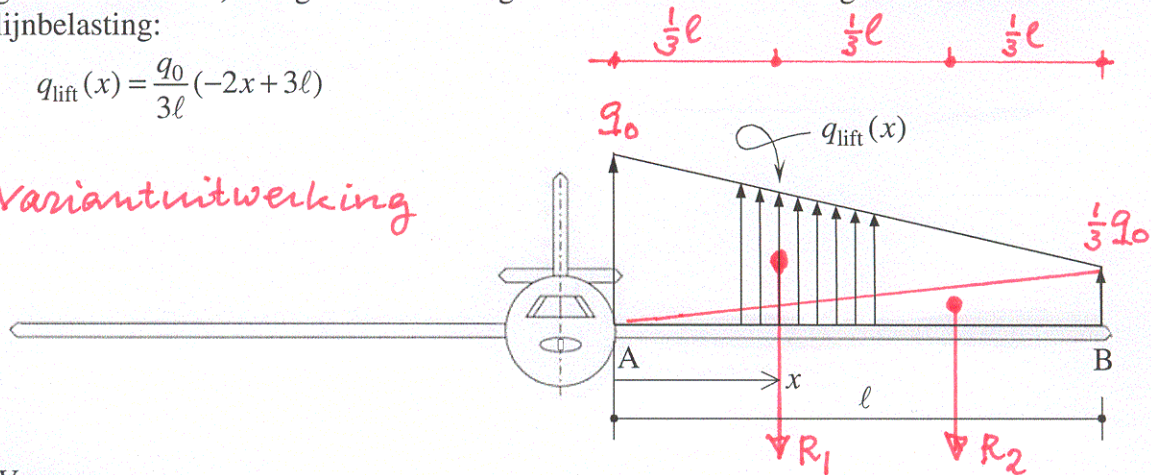
Voor vervolg opgave 1 zie volgend blad ►

**Opgave 1** (gewicht 2,0 - ongeveer 40 minuten)

Een vliegtuig krijgt tijdens een kruisvlucht plotseling door turbulentie te maken met een asymmetrische liftverdeling. Op een bepaald ogenblik kan deze voor (de tot lijnelement geschematiseerde) vleugel AB worden geschematiseerd tot de volgende verdeelde lijnbelasting:

$$q_{\text{lift}}(x) = \frac{q_0}{3\ell}(-2x + 3\ell)$$

Variantuitwerking



Vragen:

- a. Bepaal de resultante van de liftverdeling op vleugel AB.

Splits trapeziumbelasting in twee driehoeksbelastingen.

$$R = R_1 + R_2 = \frac{1}{2}q_0l + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}q_0l = \frac{2}{3}q_0l \quad (\uparrow)$$

- b. Bepaal de x-coördinaat van de werklijn van deze resultante. Teken de resultante in bovenstaande figuur en schrijf de waarden van plaats en grootte er bij.

$$\sum T/A = R \cdot x_R = R_1 \cdot x_{R_1} + R_2 \cdot x_{R_2}$$

$$= \frac{1}{2}q_0l \cdot \frac{1}{3}l + \frac{1}{6}q_0l \cdot \frac{2}{3}l = \frac{5}{18}q_0l^2$$

$$x_R = \frac{\frac{5}{18}q_0l^2}{\frac{2}{3}q_0l} = \frac{\frac{5}{18}q_0l^2}{\frac{2}{3}q_0l} = \frac{5}{12}l$$

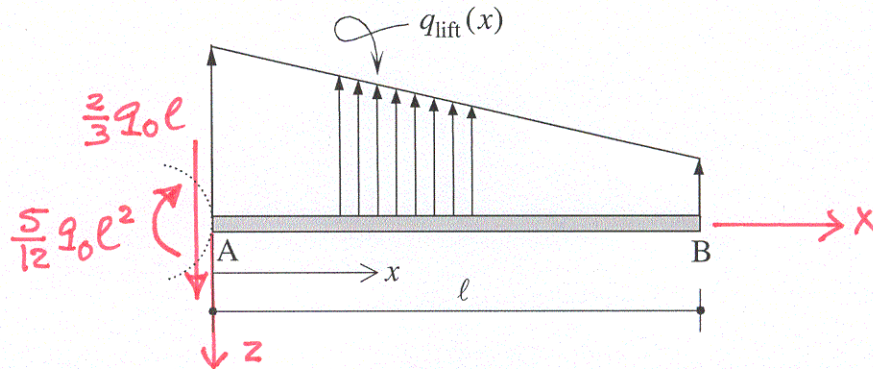
Zie verder blad 1a

Voor vervolg opgave 1 zie volgend blad ►



|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

- c. Maak de vleugel in A vrij van de romp en bereken en teken het buigend moment en de dwarskracht die in A op de vleugel werken. Schrijf in de figuur de waarden er bij.

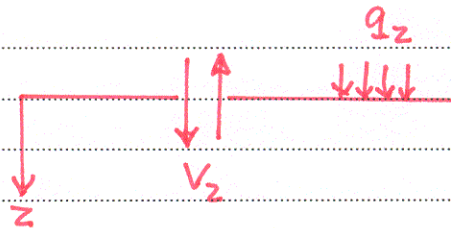


- d. Leid voor een uit de vleugel vrijgemaakt balkelementje met kleine lengte  $\Delta x$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) de differentiaalbetrekking af voor het verticaal krachterevenwicht.

$$\frac{dV_z}{dx} = -q_z$$

Zie Hantswijker, blz. 412 ev.  
 of Meriam, blz. 288 ev.

tekenafpraak hierna:



- e. Bepaal door integratie van de onder d afgeleide differentiaalbetrekking het verloop van de dwarskracht  $V$  als functie van  $x$ .

$$V_z = -\int q_z dx \quad q_z = -q_{\text{lift}}$$

$$V_z = +\int q_{\text{lift}} dx = \frac{q_0}{3l} \int (-2x + 3l) dx = \frac{q_0}{3l} (-x^2 + 3lx + C_1)$$

randvoorwaarde:  $x=l; V_z=0 \rightarrow C_1 = -2l^2$

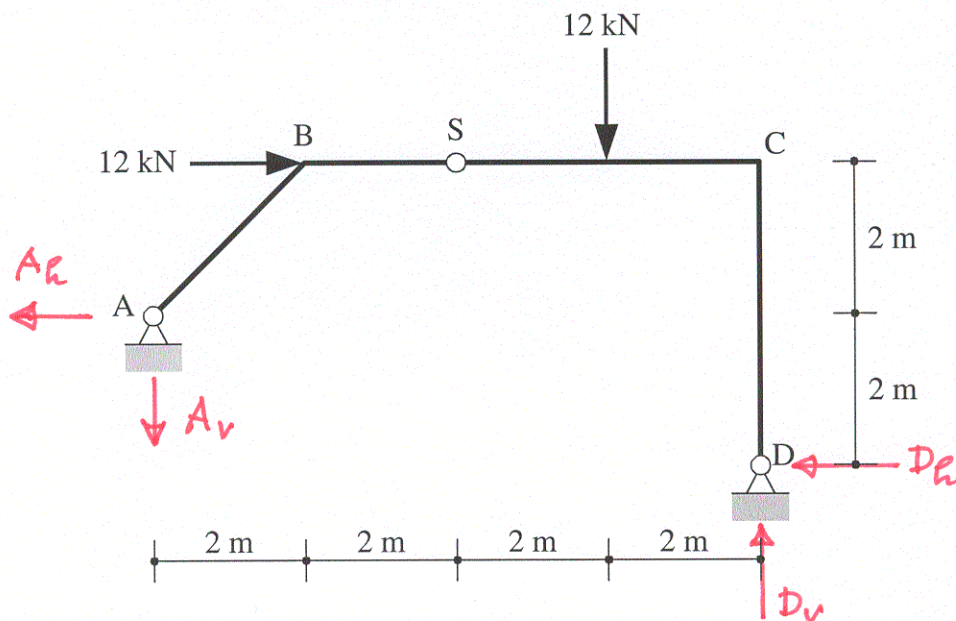
$$V_z = \frac{q_0}{3l} (-x^2 + 3lx - 2l^2)$$

(controle:  $x=0; V_z = -\frac{2}{3}q_0 l \Rightarrow$  wordt aan voldaan!)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

**Opgave 2** (gewicht 2,0 - ongeveer 35 minuten)

Driescharnierenspan ABSCD bestaat uit de in A en D scharnierend opgelegde spanthelften ABS en SCD die in S scharnierend met elkaar zijn verbonden. Afmetingen en belastingen kunnen uit de figuur worden afgelezen.



Vragen:

- a. Bereken de horizontale en verticale oplegreacties in A en D. Teken ze (in de figuur op de volgende bladzijde) in de richtingen waarin zij in werkelijkheid werken en schrijf de waarden er bij.

Voor ABSCD:

$$\sum \mathcal{M}_A = D_v \cdot 8\text{ m} - D_h \cdot 2\text{ m} - 12\text{ kN} \cdot 2\text{ m} - 12\text{ kN} \cdot 6\text{ m} = 0 \quad (1)$$

Voor SCD:

$$\sum \mathcal{M}_S = D_v \cdot 4\text{ m} - D_h \cdot 4\text{ m} - 12\text{ kN} \cdot 2\text{ m} = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow 4D_v - D_h = 48\text{ kN}$$

$$(2) \Rightarrow D_v - D_h = 6\text{ kN}$$

$$\begin{array}{rcl} 3D_v & = & 42\text{ kN} \quad \rightarrow D_v = +14\text{ kN} \\ & & D_h = +8\text{ kN} \end{array}$$

$$\sum F_{\text{hor}} = 0 \Rightarrow A_h = 12\text{ kN} - 8\text{ kN} = 4\text{ kN} (\leftarrow)$$

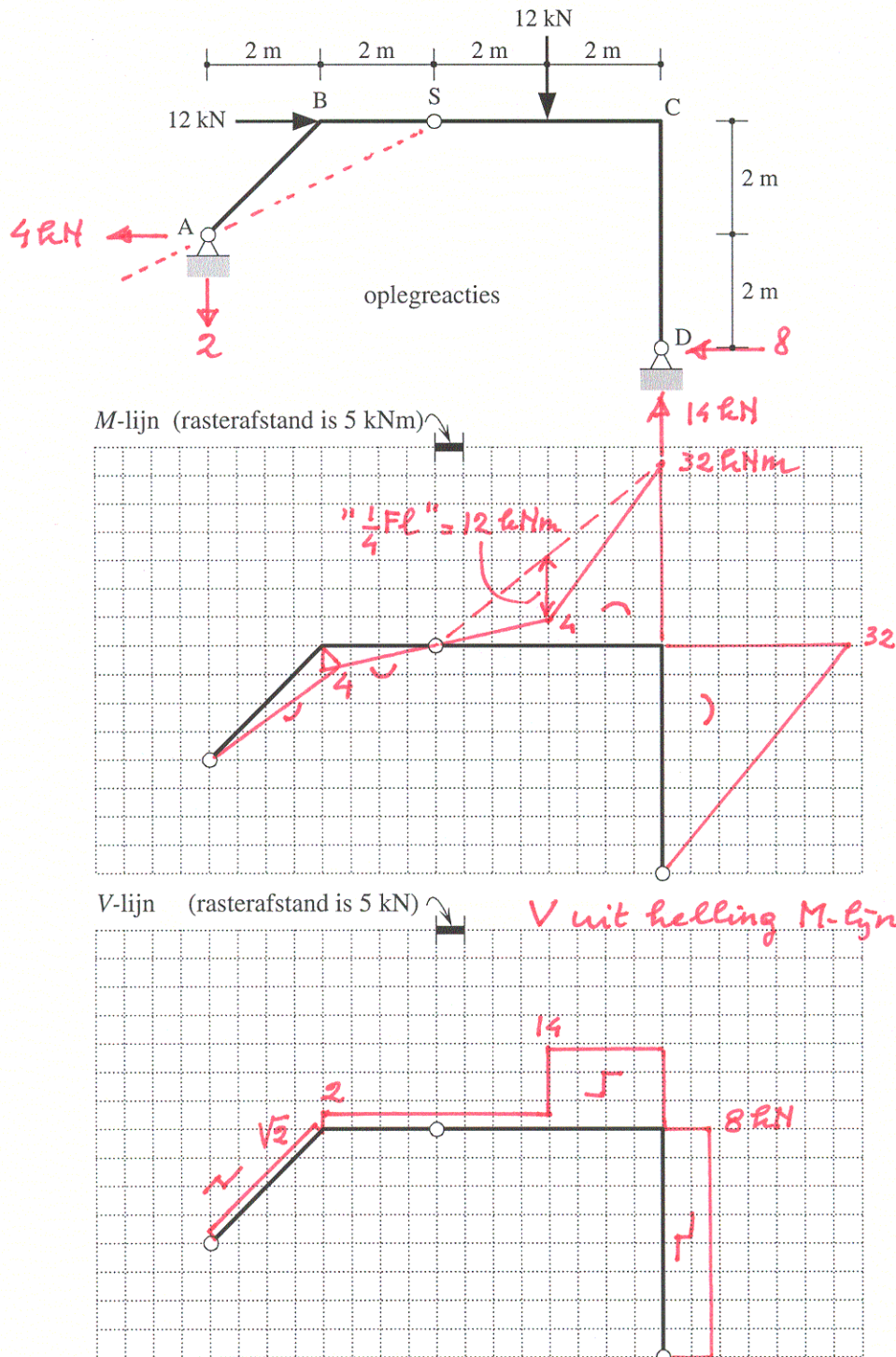
$$\sum F_{\text{vert}} = 0 \Rightarrow A_v = 14\text{ kN} - 12\text{ kN} = 2\text{ kN} (\downarrow)$$

Voor vervolg opgave 2 zie volgend blad ►



|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

- b. Teken voor het gehele spant de momentenlijn en dwarskrachtenlijn, met de vervormingstekens<sup>1</sup>. Schrijf de waarden er bij.

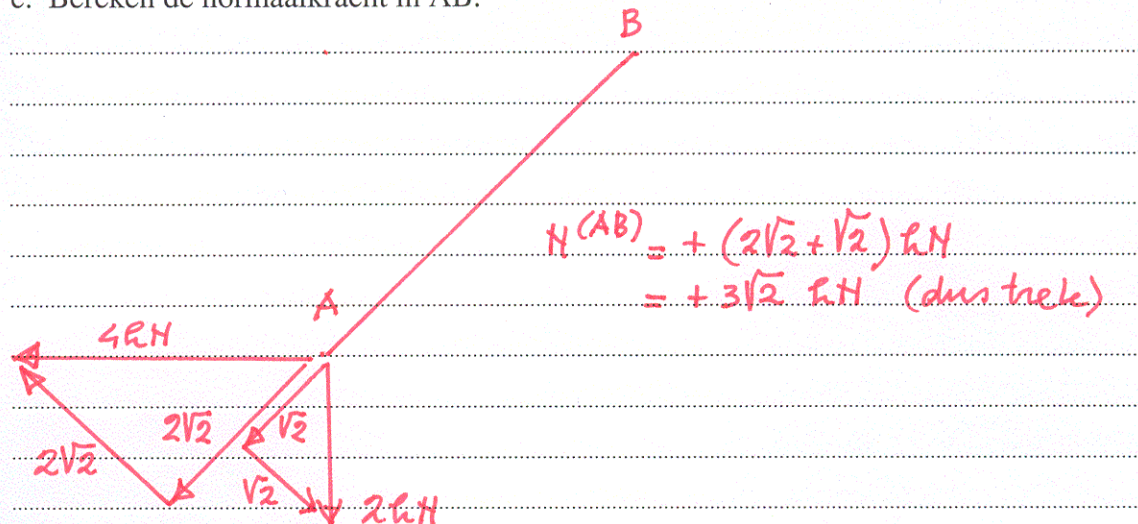


Voor vervolg opgave 2 zie volgend blad ►

<sup>1</sup> Als u geen vervormingstekens hanteert, geef dan voor elk van de rechte staven duidelijk aan welke andere tekenafspraken u gebruikt.

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

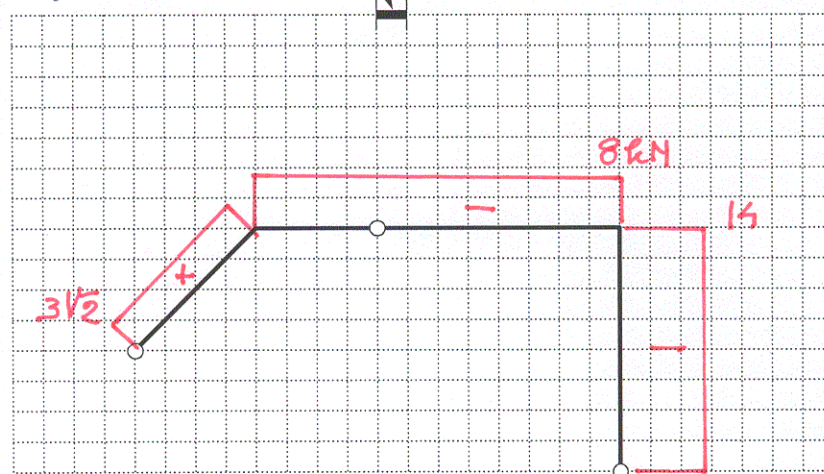
c. Bereken de normaalkracht in AB.



Controle:  $|V(AB)| = 2\sqrt{2} R - \sqrt{2} R = \sqrt{2} R$ . Zie V.lijn  
 OK →

d. Teken voor het gehele spant de normaalkrachtenlijn, met de juiste tekens voor trek en druk. Schrijf de waarden er bij.

N-lijn (rasterafstand is 5 kN)

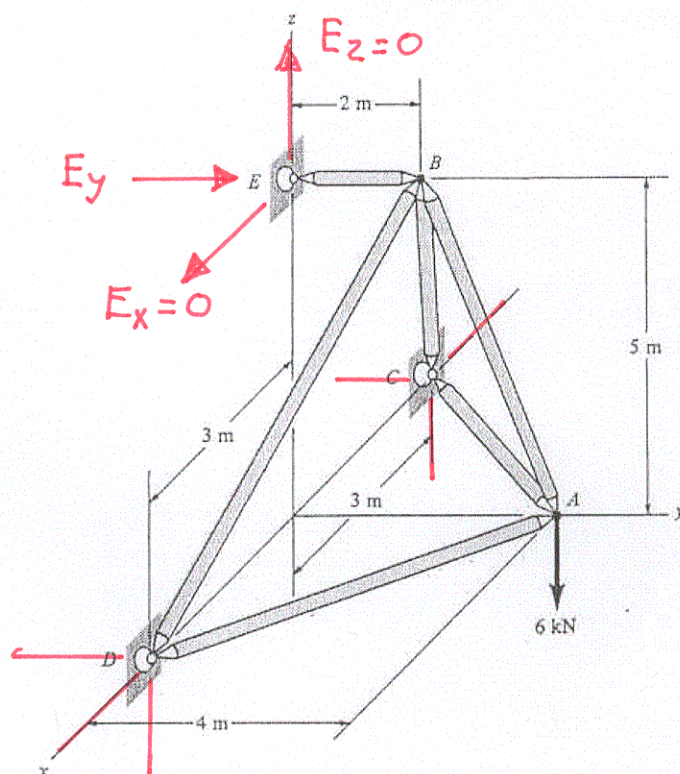




|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

**Opgave 3** (gewicht 2,2 - ongeveer 45 minuten)

Gegeven een symmetrisch ruimtevakwerk met een belasting in het vlak van spiegelsymmetrie. C, D en E zijn scharnieropleggingen. Afmetingen en belasting kunnen uit de figuur worden afgelezen.



Vragen:

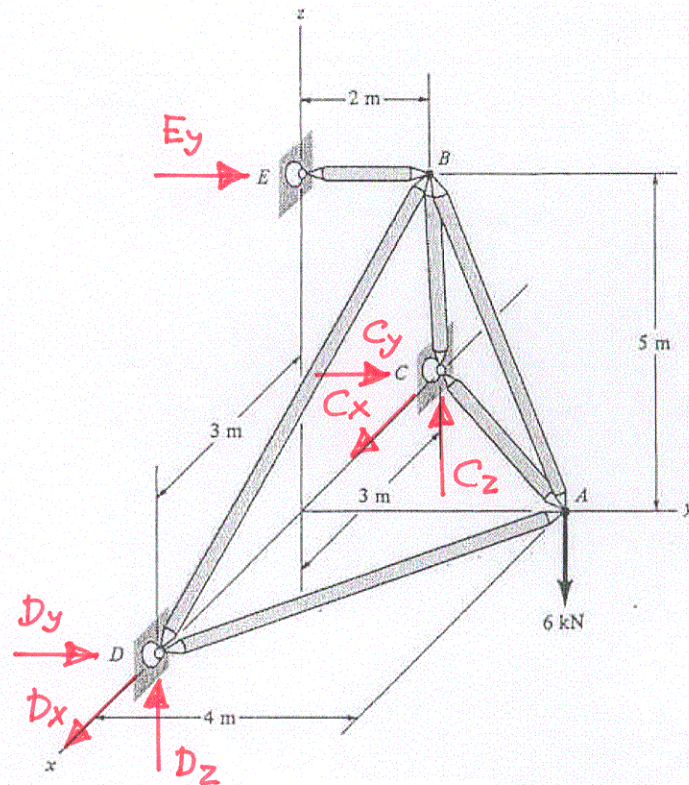
- a. Bereken oplegreacties  $E_x$ ,  $E_y$  en  $E_z$  in E.

EB is een vakwerkstaaf en kan alleen krachten langs de staafes overdragen  $\Rightarrow E_x = E_z = 0$

$$\sum T_x | D = -E_y \cdot 5 \text{ m} - 6 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} = 0 \Rightarrow E_y = -4,8 \text{ kN}$$

Voor vervolg opgave 3 zie volgend blad ►

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|



b. Bereken de oplegreacties  $D_y$  en  $D_z$  in D.

$$\sum F_y = E_y + C_y + D_y = 0$$

$$\text{Symmetrie} \Rightarrow C_y = D_y = -\frac{1}{2} E_y = +2,4 \text{ kN}$$

$$D_y \text{ kan ook worden berekend uit } \sum T_z / C = 0$$

$$\sum F_z = C_z + D_z - 6 \text{ kN} = 0$$

$$\text{Symmetrie} \Rightarrow C_z = D_z = +3 \text{ kN}$$

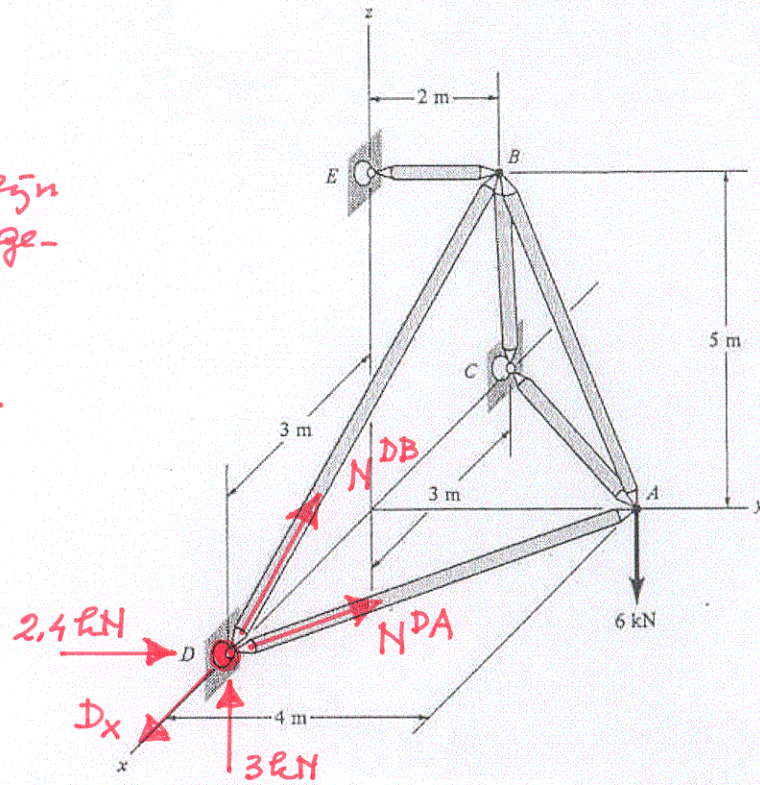
$$D_z \text{ kan ook worden berekend uit } \sum T_y / C = 0$$

Voor vervolg opgave 3 zie volgend blad ►



|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

In de figuur zijn alle krachten getekend op het vrijgemaakte knooppunt D.



- c. Bereken uit het krachterevenwicht van knooppunt D de oplegreactie  $D_x$  in D en de normaalkrachten  $N^{AD}$  in AD en  $N^{BD}$  in BD. Schrijf daartoe de drie vergelijkingen voor het krachterevenwicht uit en los dit stelsel vergelijkingen op.

$$DA: \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5; \quad DB: \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$

$$\sum F_x = D_x - \frac{3}{5} N^{DA} - \frac{3}{\sqrt{38}} N^{DB} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 2.4 \text{ kN} + \frac{4}{5} N^{DA} + \frac{2}{\sqrt{38}} N^{DB} = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 3 \text{ kN} + 0 + \frac{5}{\sqrt{38}} N^{DB} = 0 \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow N^{DB} = -\frac{3}{5} \sqrt{38} \text{ kN} \quad (\text{dus een drukkracht})$$

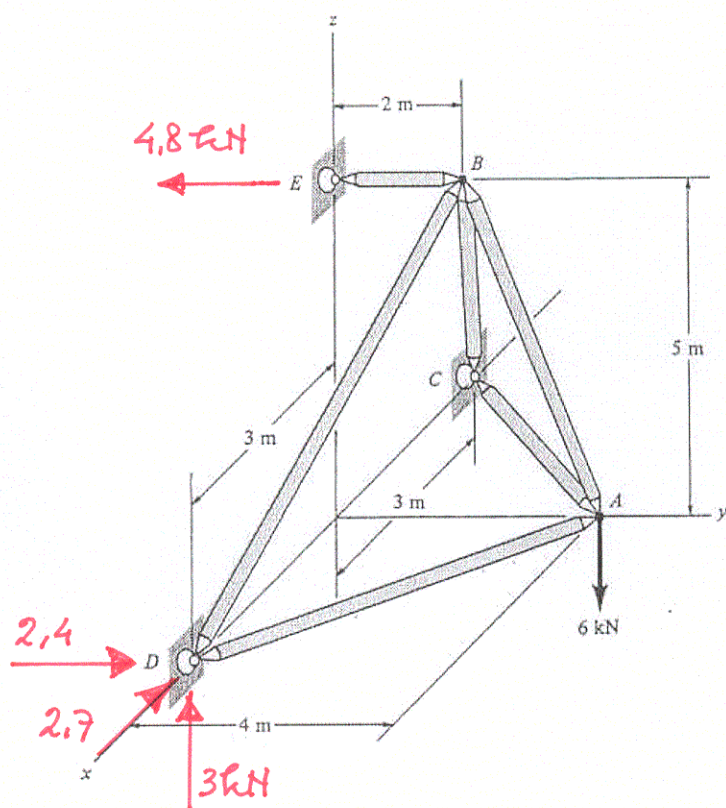
$$(2) \Rightarrow N^{DA} = -1.5 \text{ kN} \quad (\text{eveneens een drukkracht})$$

$$(1) \Rightarrow D_x = -2.7 \text{ kN}$$

Voor vervolg opgave 3 zie volgend blad ►

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

- d. Verzamel de berekende oplegreacties in D en E in onderstaande tabel. Teken deze oplegreacties verder in onderstaande figuur zoals zij in werkelijkheid werken en schrijf de waarden er bij.



| Oplegreactie | kracht in kN |
|--------------|--------------|
| $D_x$        | -2,7         |
| $D_y$        | +2,4         |
| $D_z$        | +3           |
| $E_x$        | 0            |
| $E_y$        | -4,8         |
| $E_z$        | 0            |

- e. Verzamel de berekende normaalkrachten in AD en BD in de tabel hiernaast, met de goede tekens voor trek en druk.

| Staaf | $N$ in kN               |
|-------|-------------------------|
| AD    | -1,5                    |
| BD    | $-\frac{3}{5}\sqrt{38}$ |

(3,7)



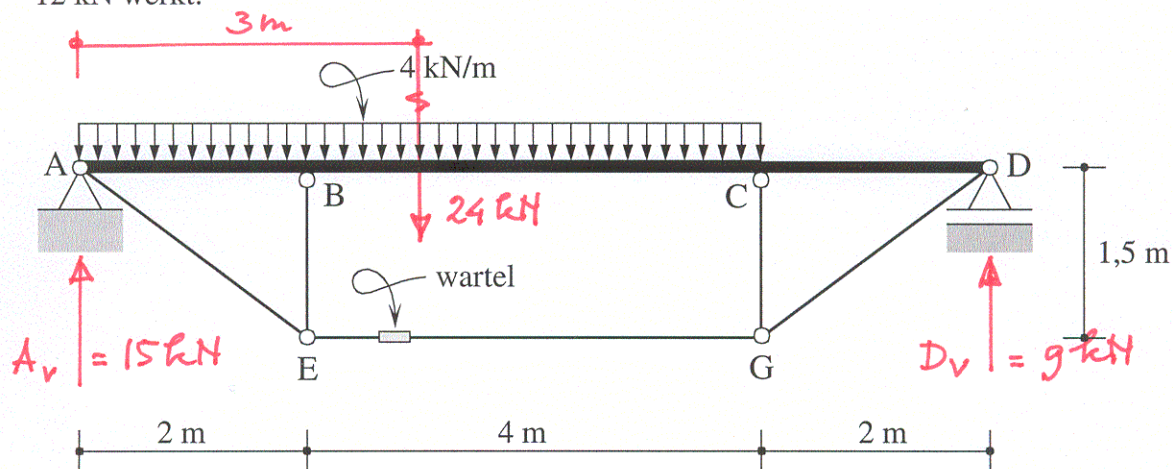
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

**Opgave 4** (gewicht 2,2 - ongeveer 45 minuten)

In de getekende constructie (een versterkte ligger) is ABCD een doorgaande ligger en zijn AE, BE, CG, DG en EG stangen die scharnierend met elkaar en met ligger ABCD zijn verbonden. De constructie is scharnierend opgelegd in A en opgelegd op een rol in D.

Afmetingen en belasting volgen uit de figuur.

In stang EG zit een wartel die zover is aangedraaid dat in deze staaf een trekkracht van 12 kN werkt.



Vragen:

- a. Bereken de oplegreacties in A en D. Teken ze in de figuur zoals ze in werkelijkheid werken en schrijf de waarden er bij.

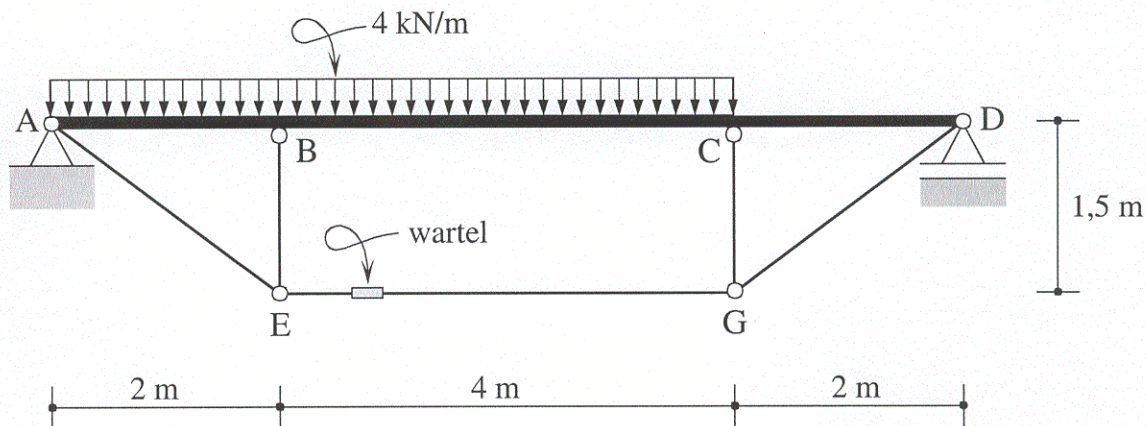
$$\sum \tau | A \rangle = -24 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} + D_v \cdot 8 \text{ m} = 0 \Rightarrow D_v = 9 \text{ kN}$$

$$\sum F_{\text{vert}} = 0 \Rightarrow A_v = 24 \text{ kN} - 9 \text{ kN} = 15 \text{ kN}$$

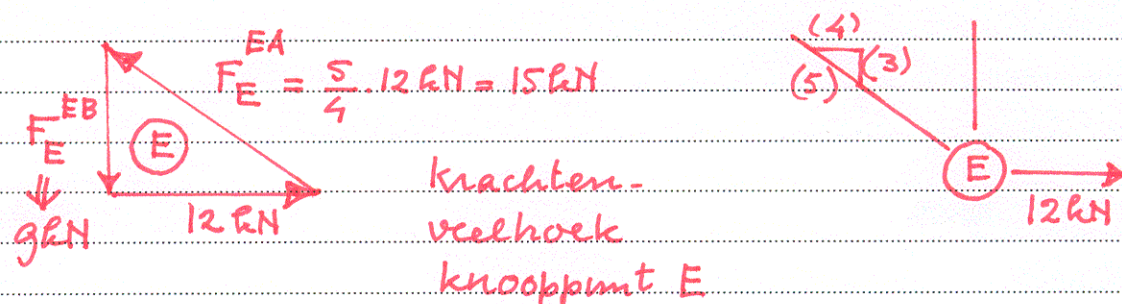
$$\sum F_{\text{hor}} = 0 \Rightarrow A_h = 0$$

Voor vervolg opgave 4 zie volgend blad ►

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|



- b. Bereken de normaalkrachten in alle stangen, met de goede tekens voor trek en druk. Verzamel de gevonden waarden in een tabel.



$$N^{EA} = +F_E^{EA} = +15 \text{ kN} \quad (\text{trekkracht})$$

$$N^{EB} = -F_E^{EB} = -9 \text{ kN} \quad (\text{drukkracht})$$

$$N^{GD} = N^{EA} = +15 \text{ kN}$$

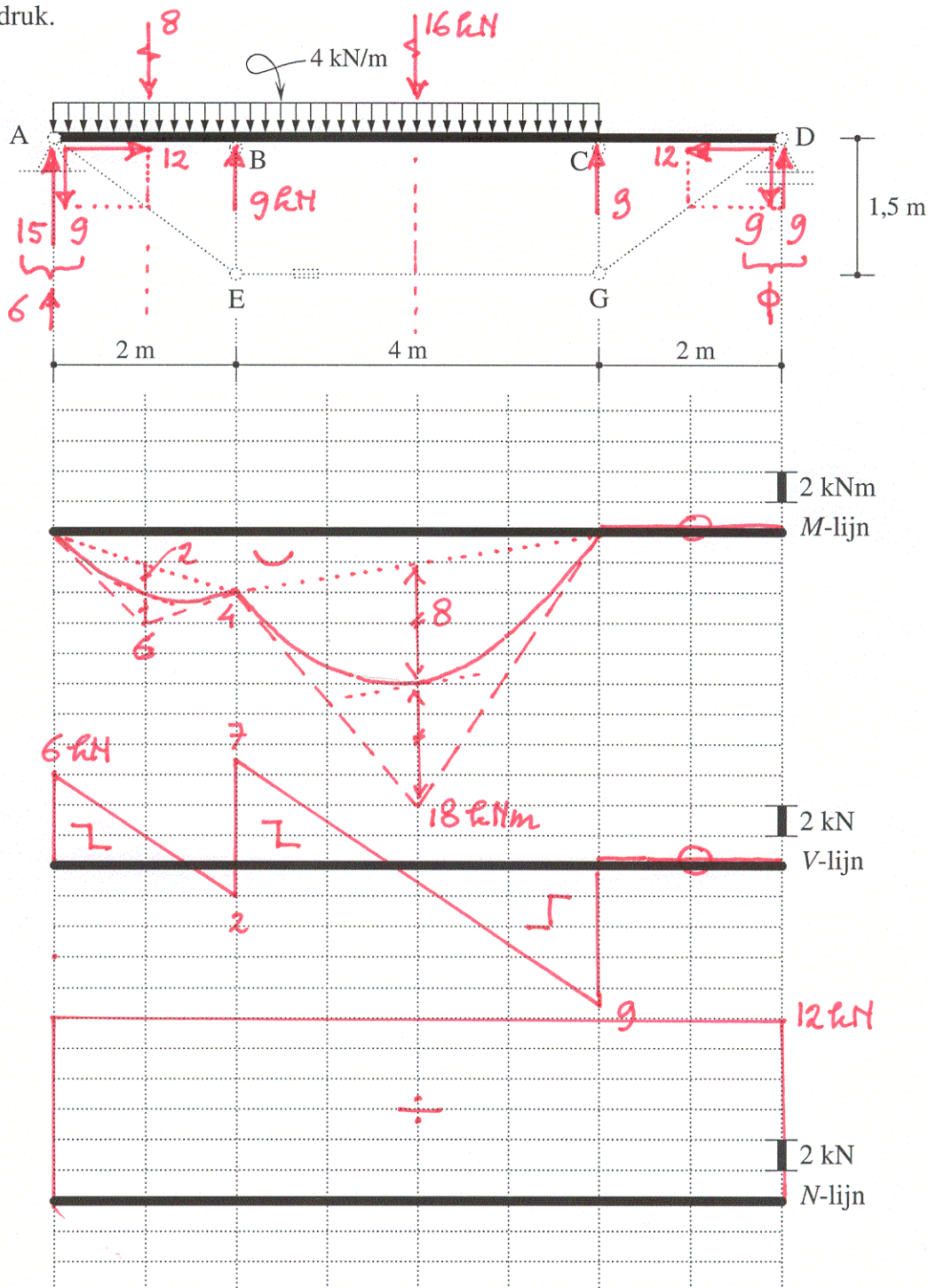
$$N^{GC} = N^{EB} = -9 \text{ kN}$$

- c. Maak ligter ABCD vrij en teken alle krachten die er op werken (zie de bovenste figuur op het volgende blad).



|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

- d. Teken voor ABCD de momenten- en dwarskrachtenlijn, met de vervormingstekens<sup>1</sup>. Schrijf de waarden er bij. Teken in A, B en C ook de raaklijnen aan de momentenlijn en laat duidelijk per veld zien waar zij elkaar snijden.
- e. Teken voor ABCD ook de normaalkrachtenlijn met de goede tekens voor trek en druk.

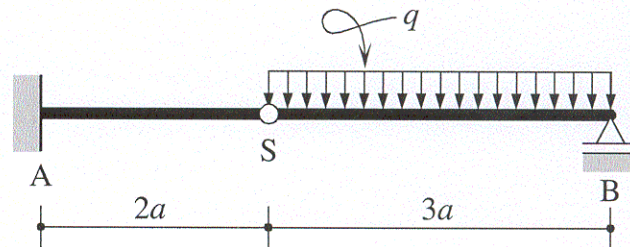


<sup>1</sup> Als u geen vervormingstekens hanteert, geef dan duidelijk aan welke andere tekenafspraken u gebruikt.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

**Opgave 5** (gewicht 1,6 - ongeveer 15 minuten)

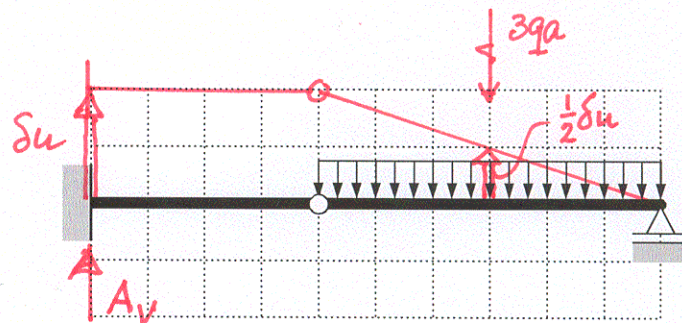
Ligger ASB is ingeklemd in A en opgelegd op een rol in B. In S zijn AS en SB scharnierend met elkaar verbonden. Afmetingen en belasting volgen uit de figuur.



Vragen:

Bereken met virtuele arbeid (en laat per geval duidelijk zien hoe u de berekening uitvoert):

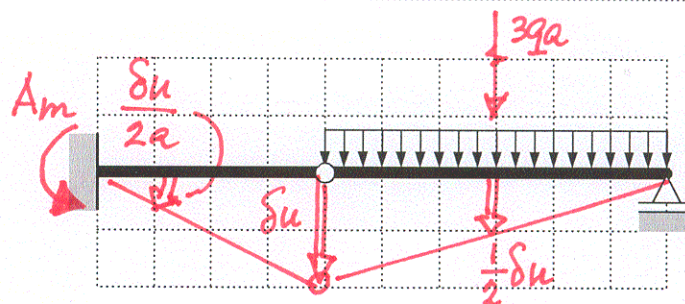
a. De verticale oplegreactie in A.



$$\delta A = +A_v \cdot \delta u - 3qa \cdot \frac{1}{2} \delta u = 0 \Rightarrow A_v = +\frac{3}{2}qa$$

De aangenomen richting is juist.

b. Het inklemmingsmoment in A.



$$\delta A = -A_m \frac{\delta u}{2a} + 3qa \cdot \frac{1}{2} \delta u = 0 \Rightarrow A_m = +3qa^2$$

De aangenomen richting voor het inklemmingsmoment blijft dus juist.